

ECUACIONES EXPONENCIALES

1. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales

a) $3^{-x+1} = 3^{2x+3}$

Solución.

Exponenciales con igual base, se igualan los exponentes.

$$\begin{aligned}3^{-x+1} = 3^{2x+3} &\Leftrightarrow -x+1 = 2x+3 \\1-2 &= 2x+x \\3x &= -1 : x = \frac{-1}{3}\end{aligned}$$

b) $3 \cdot 3^x = 243$

Solución.

Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$3 \cdot 3^x = 243 : 3^{1+x} = 3^5 : 1+x = 5 : x = 4$$

c) $2^{2x+2} = 0'5^{2x-1}$

Solución.

Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$\begin{aligned}2^{2x+2} = 0'5^{2x-1} & : 2^{2x+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} : 2^{2x+2} = (2^{-1})^{2x-1} \\2^{2x+2} = 2^{-1 \cdot (2x-1)} & : 2x+2 = -1 \cdot (2x-1) : 2x+2 = -2x+1 \\2x+2x &= 1-2 : 4x = -1 : x = \frac{-1}{4}\end{aligned}$$

d) $5 \cdot \sqrt[5]{125^{2x}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1}$

Solución.

Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$\begin{aligned}5 \cdot \sqrt[5]{125^{2x}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1} & : 5 \cdot \left((5^3)^{2x}\right)^{\frac{1}{5}} = (5^{-2})^{3x-1} : 5 \cdot 5^{3 \cdot 2x \cdot \frac{1}{5}} = 5^{-2 \cdot (3x-1)} \\5 \cdot 5^{\frac{6x}{5}} = 5^{-6x+2} & : 5^{1+\frac{6x}{5}} = 5^{-6x+2} : 1+\frac{6x}{5} = -6x+2 \\ \frac{6x}{5} + 6x &= 2-1 : \frac{6x+30x}{5} = 1 : 36x = 5 : x = \frac{5}{36}\end{aligned}$$

e) $7^{x^2-5x+6} = 1$

Solución.

Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$\begin{aligned}7^{x^2-5x+6} = 1 & : 7^{x^2-5x+6} = 7^0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \\x &= \frac{(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} : \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}\end{aligned}$$

f) $4^x - 2^x = 2$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 2^x .

$$4^x - 2^x = 2 \quad : \quad (2^2)^x - 2^x - 2 = 0 \quad : \quad (2^x)^2 - 2^x - 2 = 0$$

Cambio de variable: $2^x = t > 0$ (por definición, la exponencial siempre es positiva).

$$t^2 - t - 2 = 0 \quad : \quad t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

- $t = -1$: No tiene sentido, la exponencial siempre es positiva
- $t = 2$: $t = 2^x = 2 = 2^1 \Leftrightarrow x = 1$

g) $4^x \cdot 16^x = 2$

Solución.

Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$4^x \cdot 16^x = 2 \quad : \quad (2^2)^x \cdot (2^4)^x = 2 \quad : \quad 2^{2x} \cdot 2^{4x} = 2 \quad : \quad 2^{2x+4x} = 2^1$$

$$2^{6x} = 2^1 \Rightarrow 6x = 1 \quad : \quad x = \frac{1}{6}$$

h) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 3^x .

$$9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0 : \begin{cases} 9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 \\ 3^{x+2} = 3^2 \cdot 3^x = 9 \cdot 3^x \end{cases} : (3^x)^2 - 2 \cdot 9 \cdot 3^x + 81 = 0$$

$$(3^x)^2 - 18 \cdot 3^x + 81 = 0 : \{t = 3^x > 0\} : t^2 - 18 \cdot t + 81 = 0 : t = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81}}{2 \cdot 1} = 9$$

$$t = 3^x = 9 = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$$

i) $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 7^x .

$$7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0 : \begin{cases} 7^{2x+3} = 7^3 \cdot 7^{2x} = 343 \cdot (7^x)^2 \\ 7^{x+1} = 7^1 \cdot 7^x = 7 \cdot 7^x \end{cases} : 343 \cdot (7^x)^2 - 8 \cdot 7 \cdot 7^x + 1 = 0$$

$$343 \cdot (7^x)^2 - 56 \cdot 7^x + 1 = 0 : \{7^x = t > 0\} : 343 \cdot t^2 - 56 \cdot t + 1 = 0 : t = \frac{-(-56) \pm \sqrt{(-56)^2 - 4 \cdot 343 \cdot 1}}{2 \cdot 343} =$$

$$= \frac{56 \pm 42}{686} : \begin{cases} t = \frac{1}{7} = 7^{-1} = 7^x \Leftrightarrow x = -1 \\ t = \frac{1}{49} = 7^{-2} = 7^x \Leftrightarrow x = -2 \end{cases}$$

j) $2^x \cdot 3^x = 12 \cdot 18$

Solución.

Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$2^x \cdot 3^x = 12 \cdot 18 \quad : \quad (2 \cdot 3)^x = (2^2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3^2) \quad : \quad 6^x = 2^3 \cdot 3^3 \quad : \quad 6^x = (2 \cdot 3)^3$$

$$6^x = 6^3 \Leftrightarrow x = 3$$

$$k) 3^x + \frac{1}{3^{x-1}} = 4$$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 3^x .

$$3^x + \frac{1}{3^{x-1}} = 4 : 3^x + \frac{1}{3^x \cdot 3^{-1}} = 4 : 3^x + \frac{3}{3^x} = 4$$

Para quitar el denominador, se multiplica toda la ecuación por 3^x .

$$3^x \cdot \left(3^x + \frac{3}{3^x}\right) = 3^x \cdot 4 : (3^x)^2 + 3 = 4 \cdot 3^x : (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 : \{3^x = t\}$$

$$t^2 - 4 \cdot t + 3 = 0 : t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} : \begin{cases} t = 1 = 3^0 = 3^x \Leftrightarrow x = 0 \\ t = 3 = 3^1 = 3^x \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$l) 4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 2^x .

$$4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0 : \begin{cases} 4^{x+1} = 4^1 \cdot 4^x = 4 \cdot (2^2)^x = 4 \cdot (2^x)^2 \\ 2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^x = 8 \cdot 2^x \end{cases} : 4 \cdot (2^x)^2 + 8 \cdot 2^x - 320 = 0$$

$$\{2^x = t > 0\} : 4 \cdot t^2 + 8 \cdot t - 320 = 0 : t = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-320)}}{2 \cdot 4} : \begin{cases} t = -10 < 0 \text{ No válida} \\ t = 8 = 2^3 = 2^x \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$m) 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 896$$

Solución.

Ecuación con la exponencial 2^x como factor común del primer miembro.

$$2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 896 : \begin{cases} 2^{x+1} = 2^1 \cdot 2^x \\ 2^{x-1} = 2^{-1} \cdot 2^x \end{cases} : 2^{-1} \cdot 2^x + 2^x + 2^1 \cdot 2^x = 896 : (2^{-1} + 1 + 2^1) \cdot 2^x = 896$$

$$\left(\frac{1}{2} + 1 + 2\right) \cdot 2^x = 896 : \frac{7}{2} \cdot 2^x = 896 : 2^x = \frac{896 \cdot 2}{7} = 256 = 2^8 \Leftrightarrow x = 8$$

$$n) 3^x + 3^{1-x} = 4$$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 3^x , es otra forma diferente de la ecuación **k**.

$$3^x + 3^{1-x} = 4 : 3^x + \frac{3}{3^x} = 4 : \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$o) 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$$

Solución.

Ecuación con la exponencial 2^x como factor común del primer miembro.

$$2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960 : 2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^{-2} + 2^x \cdot 2^{-3} + 2^x \cdot 2^{-4} = 960$$

$$2^x \cdot (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}) = 960 : 2^x \cdot \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) = 960$$

$$2^x \cdot \frac{2^3 + 2^2 + 2 + 1}{2^4} = 960 : 2^x \cdot \frac{15}{16} = 960 : 2^x = \frac{960 \cdot 16}{15}$$

$$2^x = 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow x = 10$$

p) $2^x - 5 \cdot 2^{-x} + 4 \cdot 2^{-3x} = 0$

Solución.

Ecuación de bicuadrada en la variable 2^x . Para transformar la ecuación se multiplican los dos miembros por 2^{3x} , que es el término que queremos eliminar.

$$2^x - 5 \cdot 2^{-x} + 4 \cdot 2^{-3x} = 0 : (2^x - 5 \cdot 2^{-x} + 4 \cdot 2^{-3x}) \cdot 2^{3x} = 0 \cdot 2^{3x}$$

$$2^x \cdot 2^{3x} - 5 \cdot 2^{-x} \cdot 2^{3x} + 4 \cdot 2^{-3x} \cdot 2^{3x} = 0 : 2^{x+3x} - 5 \cdot 2^{-x+3x} + 4 \cdot 2^{-3x+3x} = 0$$

$$2^{4x} - 5 \cdot 2^{2x} + 4 \cdot 2^0 = 0 : 2^{4x} - 5 \cdot 2^{2x} + 4 \cdot 1 = 0 : 2^{2x \cdot 2} - 5 \cdot 2^{2x} + 4 = 0$$

$$(2^{2x})^2 - 5 \cdot 2^{2x} + 4 = 0 : \{2^{2x} = t > 0\} : t^2 - 5t + 4 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen dos posible valores de t.

$$t^2 - 5t + 4 = 0 : \begin{cases} t = 1 = 2^0 = 2^{2x} \Leftrightarrow 0 = 2x : x = 0 \\ t = 4 = 2^2 = 2^{2x} \Leftrightarrow 2 = 2x : x = 1 \end{cases}$$

q) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$

Solución.

Ecuación con la exponencial 3^x como factor común del primer miembro.

$$3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117 : 3^x \cdot 3^{-1} + 3^x + 3^x \cdot 3^1 = 117 : 3^x \cdot (3^{-1} + 1 + 3) = 117$$

$$3^x \cdot \left(\frac{1}{3} + 1 + 3\right) = 117 : 3^x \cdot \frac{1+3+9}{3} = 117 : 3^x \cdot \frac{13}{3} = 117 : 3^x \cdot \frac{13}{3} = 117 : 3^x = \frac{117 \cdot 3}{13}$$

$$3^x = 27 : 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$$

r) $16^x + 16^{1-x} - 10 = 0$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 16^x .

$$16^x + 16^{1-x} - 10 = 0 : 16^x + \frac{16}{16^x} - 10 = 0 : \left(16^x + \frac{16}{16^x} - 10\right) \cdot 16^x = 0 \cdot 16^x$$

$$16^x \cdot 16^x + \frac{16}{16^x} \cdot 16^x - 10 \cdot 16^x = 0 : (16^x)^2 + 16 - 10 \cdot 16^x = 0 : (16^x)^2 - 10 \cdot 16^x + 16 = 0$$

$$\{16^x = t\} : t^2 - 10t + 16 = 0 : \text{Ecc } 2^\circ \text{ grado} : \begin{cases} t = 2 = 16^x = (2^4)^x = 2^{4x} : 2^1 = 2^{4x} \Leftrightarrow 1 = 4x : x = \frac{1}{4} \\ t = 8 = 16^x = (2^4)^x = 2^{4x} : 2^3 = 2^{4x} \Leftrightarrow 3 = 4x : x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

s) $2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} + 2^{2x-4} = 1984$

Solución.

Ecuación con la exponencial 2^{2x} como factor común del primer miembro.

$$2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} + 2^{2x-4} = 1984 :$$

$$2^{2x} + 2^{2x} \cdot 2^{-1} + 2^{2x} \cdot 2^{-2} + 2^{2x} \cdot 2^{-3} + 2^{2x} \cdot 2^{-4} = 1984$$

$$2^{2x} \left(1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}\right) = 1984 : 2^{2x} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = 1984 : 2^{2x} \frac{16+8+4+2+1}{16} = 1984$$

$$2^{2x} \frac{31}{16} = 1984 : 2^{2x} = \frac{1984 \cdot 16}{31} : 2^{2x} = 1024 : 2^{2x} = 2^{10} \Leftrightarrow 2x = 10 : x = 5$$

t) $3^{2 \cdot (x+1)} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$

Solución.

Ecuación de segundo grado en la variable 3^x .

$$3^{2 \cdot (x+1)} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0 : 3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0 : 3^2 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$9 \cdot (3^x)^2 - 28 \cdot 3^x + 3 = 0 : \{3^x = t > 0\} : 9t^2 - 28t + 3 = 0$$

Ecuación de segundo grado.

$$9t^2 - 28t + 3 = 0 : \begin{cases} t = 3 = 3^x \Leftrightarrow x = 1 \\ t = \frac{1}{9} = 3^{-2} = 3^x \Leftrightarrow x = -2 \end{cases}$$

u) $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$

Solución.

Ecuación con la exponencial 3^x como factor común del primer miembro.

$$3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363 : 3^x + 3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3^{-2} + 3^x \cdot 3^{-3} + 3^x \cdot 3^{-4} = 363$$

$$3^x \left(1 + 3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3} + 3^{-4} \right) = 363 : 3^x \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \right) = 363$$

$$3^x \cdot \frac{81 + 27 + 9 + 3 + 1}{81} = 363 : 3^x \cdot \frac{121}{81} = 363 : 3^x = \frac{363 \cdot 81}{121} : 3^x = 243$$

$$3^x = 3^5 \Leftrightarrow x = 5$$

v) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{62}{5}$

Solución.

Ecuación con la exponencial 5^x como factor común del primer miembro.

$$5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{62}{5} : 5^x \cdot 5^1 + 5^x + 5^x \cdot 5^{-1} = \frac{62}{5} : 5^x \cdot (5^1 + 1 + 5^{-1}) = \frac{62}{5}$$

$$5^x \cdot \left(5 + 1 + \frac{1}{5} \right) = \frac{62}{5} : 5^x \cdot \left(6 + \frac{1}{5} \right) = \frac{62}{5} : 5^x \cdot \frac{30 + 1}{5} = \frac{62}{5} : 5^x \cdot \frac{31}{5} = \frac{62}{5}$$

$$5^x = \frac{62 \cdot 5}{5 \cdot 31} : 5^x = 2$$

Como 2 no se puede poner en base 5, para despejar x hay que tomar logaritmos en ambos miembros de la igualdad y aplicando las propiedades de estos, despejar x.

$$5^x = 2 \Rightarrow \log 5^x = \log 2 : x \log 5 = \log 2 : x = \frac{\log 2}{\log 5}$$

w) $3^x = 4$

Solución.

Teniendo en cuenta que 4 no se puede expresar en base 3, para resolver la ecuación se toman logaritmos.

$$3^x = 4 : \log 3^x = \log 4 : x \log 3 = \log 4 : x = \frac{\log 4}{\log 3}$$

x) $e^{4x-2} = 28$

Solución.

Para resolver la ecuación se toman logaritmos neperianos, que son en base e, y permiten eliminar la exponencial del primer miembro.

$$e^{4x-2} = 28 : \ln e^{4x-2} = \ln 28 : (4x-2) \ln e = \ln 28 : (4x-2) \cdot 1 = \ln 28$$

$$4x - 2 = \ln 28 : x = \frac{2 + \ln 28}{4}$$

y) $e^{2x-1} = (\sqrt[4]{2})^3$

Solución.

Para resolver la ecuación se toman logaritmos neperianos, que son en base e, y permiten eliminar la exponencial del primer miembro.

$$e^{2x-1} = (\sqrt[4]{2})^3 : \ln e^{2x-1} = \ln(2)^{3/4} : (2x-1)\ln e = \frac{3}{4} \ln 2 : (2x-1) \cdot 1 = \frac{3}{4} \ln 2$$

$$2x-1 = \frac{3 \ln 2}{4} : x = \frac{1 + \frac{3 \ln 2}{4}}{2} = \frac{4 + 3 \ln 2}{8}$$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales:

a)
$$\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^x - 6^y = 339 \end{cases}$$

Solución.

Se resuelve por cambio de variable ($5^x = t$; $6^y = s$).

$$\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases} : \begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^1 \cdot 6^y = 807 \\ 15 \cdot 5^{-1} \cdot 5^x - 6^y = 339 \end{cases} : \begin{cases} 3 \cdot 5^x + 12 \cdot 6^y = 807 \\ 15 \cdot \frac{1}{5} \cdot 5^x - 6^y = 339 \end{cases} : \begin{cases} 3 \cdot 5^x + 12 \cdot 6^y = 807 \\ 15 \cdot \frac{1}{5} \cdot 5^x - 6^y = 339 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 12 \cdot 6^y = 807 \\ 3 \cdot 5^x - 6^y = 339 \end{cases} : \text{Cambio de variable: } \begin{cases} 5^x = t > 0 \\ 6^y = s > 0 \end{cases} : \Rightarrow \begin{cases} 3t + 12s = 807 \\ 3t - s = 339 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema (Por eliminación, restando las ecuaciones se elimina t).

$$\begin{array}{r} 3t + 12s = 807 \\ 3t - s = 339 : 13s = 468 : s = \frac{468}{13} = 36 \\ \hline (-) : / 13s = 468 \end{array}$$

Conocido el valor de s se sustituye en la segunda ecuación y se despeja t.

$$3t - 36 = 339 : 3t = 375 : t = \frac{375}{3} = 125$$

$$\begin{cases} 5^x = t = 125 = 5^3 \Leftrightarrow x = 3 \\ 6^y = s = 36 = 6^2 \Leftrightarrow y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5^{x+y} = 25^3 \\ 5^{x-y} = 25 \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 25^3 \\ 5^{x-y} = 25 \end{cases} : \begin{cases} 5^{x+y} = 5^6 \\ 5^{x-y} = 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 6 \\ x-y = 2 \end{cases}$$

El sistema resultante se resuelve por eliminación, sumando se despeja x, restando y.

$$\begin{cases} x+y = 6 \\ x-y = 2 \end{cases} : \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{x+y} = 243 \end{cases}$$

Solución.

Se resuelve por cambio de variable ($3^x = t$; $3^y = s$).

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{x+y} = 243 \end{cases} = \begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^x \cdot 3^y = 243 \end{cases} : \begin{cases} 3^x = t > 0 \\ 3^y = s > 0 \end{cases} : \begin{cases} t+s = 36 \\ t \cdot s = 243 \end{cases}$$

Sistema no lineal.

$$\begin{cases} t+s=36 \\ t \cdot s=243 \end{cases} : s=36-t : \{t \cdot (36-t)=243 : t^2-36t+243=0 : \begin{cases} t=27 : s=36-27=9 \\ t=9 : s=36-9=27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=27=3^3=3^x \Leftrightarrow x=3 : (3,2) \text{ ó } \\ s=9=3^2=3^y \Leftrightarrow y=2 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} t=9=3^2=3^x \Leftrightarrow x=2 : (2,3) \\ s=27=3^3=3^y \Leftrightarrow y=3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2^{2x} + 2^{2y} = 85 \\ 2^{2 \cdot (x+y)} = 324 \end{cases}$$

Solución.

Se resuelve por cambio de variable ($2^{2x} = t$; $2^{2y} = s$).

$$\begin{cases} 2^{2x} + 2^{2y} = 85 \\ 2^{2 \cdot (x+y)} = 324 \end{cases} = \begin{cases} 2^{2x} + 2^{2y} = 85 \\ 2^{2x} \cdot 2^{2y} = 324 \end{cases} : \begin{cases} 2^{2x} = t \\ 2^{2y} = s \end{cases} : \begin{cases} t+s=85 \\ t \cdot s=324 \end{cases}$$

Sistema no lineal de ecuaciones. Se resuelve por sustitución.

$$\begin{cases} t+s=85 \\ t \cdot s=324 \end{cases} : s=85-t : \{t \cdot (85-t)=324 : t^2-85t+324=0 : \begin{cases} t=4 : s=85-4=81 \\ t=81 : s=85-81=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=4=2^2=2^{2x} \Leftrightarrow 2x=2 : x=1 \\ t=81=2^{2y} : \log 81 = \log 2^{2y} : 2y \log 2 = \log 81 : y = \frac{\log 81}{2 \log 2} \text{ ó viceversa} \end{cases}$$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1. Calcular Los logaritmos que se indican a continuación

- a) $\log_3 9$
- b) $\log_2 1024$
- c) $\log_{\frac{1}{3}} 9$
- d) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{125}$
- e) $\log_{216} 6$
- f) $\log_{27} \frac{\sqrt{3}}{9}$

Solución.

Aplicando la definición de logaritmo se transforma en una exponencial.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

- a) $\log_3 9 = x \Leftrightarrow 3^x = 9 : 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$
- b) $\log_2 1024 = x \Leftrightarrow 2^x = 1024 : 2^x = 2^{10} \Rightarrow x = 10$
- c) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 : (3^{-1})^x = 3^2 : 3^{-x} = 3^2 \Rightarrow -x = 2 : x = -2$
- d) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{125} = x \Leftrightarrow (\sqrt{5})^x = \frac{1}{125} : (5^{1/2})^x = 5^{-3} : 5^{x/2} = 5^{-3} \Rightarrow \frac{x}{2} = -3 : x = -6$
- e) $\log_{216} 6 = x \Leftrightarrow 216^x = 6 : (6^3)^x = 6 : 6^{3x} = 6^1 \Rightarrow 3x = 1 : x = \frac{1}{3}$
- f) $\log_{27} \frac{\sqrt{3}}{9} = x \Leftrightarrow 27^x = \frac{\sqrt{3}}{9} : (3^3)^x = \frac{3^{1/2}}{3^2} : 3^{3x} = 3^{\frac{1}{2}-2} : 3^{3x} = 3^{\frac{-3}{2}} \Rightarrow 3x = -\frac{3}{2} : x = -\frac{1}{2}$

2. Hallar la base de los logaritmos en las siguientes igualdades

- a) $\log_a 4 = 2$
- b) $\log_a 9 = 2$
- c) $\log_a 0'125 = 3$
- d) $\log_a 0'015625 = 3$
- e) $\log_a 0'001 = -3$
- f) $\ln 4x = 5$
- g) $\log_3 64 = x$

Solución.

Aplicando la definición de logaritmo se transforma en una exponencial.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

- a) $\log_a 4 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 4 : a = \sqrt{4} = 2$
- b) $\log_a 9 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 9 : a = \sqrt{9} = 3$
- c) $\log_a 0'125 = 3 \Leftrightarrow a^3 = 0'125 : a = \sqrt[3]{0'125} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$
- d) $\log_a 0'015625 = 3 \Leftrightarrow a^3 = 0'015625 : a = \sqrt[3]{0'015625} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^6}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
- e) $\log_a 0'001 = -3 \Leftrightarrow a^{-3} = 0'001 : \frac{1}{a^3} = 0'001 : a^3 = \frac{1}{0'001} : a^3 = 1000 : a = \sqrt[3]{1000} = 10$

3. Resolver las siguientes igualdades aplicando la definición de logaritmo:

- a) $2^x = 16$
- b) $3^{1/x} = 9$
- c) $\log_2 64 = x$
- d) $\log_{16} 0'5 = x$
- e) $\log_{10} 0'00001 = x$
- f) $\log_x 125 = \frac{3}{2}$
- g) $\log_3 x = 4$
- h) $\log_{343} \sqrt{7} = x$
- i) $\log_{5/3} \frac{27}{25} = x$
- j) $\ln 4x = 5$
- k) $\log_3 64 = x$

Solución.

Para resolver este ejercicio hay que tener en cuenta que el logaritmo y la exponencial son operaciones inversas:

- $\log_a a^n = n$
- $a^{\log_a n} = n$

- a) $2^x = 16 \Leftrightarrow \log_2 2^x = \log_2 16 : \{\log_2 2^x = x\} : x = \log_2 2^4 : x = 4$
- b) $3^{1/x} = 9 \Leftrightarrow \log_3 3^{1/x} = \log_3 9 : \frac{1}{x} = \log_3 3^2 : \frac{1}{x} = 2 : x = \frac{1}{2}$
- c) $\log_2 64 = x : \log_2 2^6 = x : x = 6$
- d) $\log_{16} 0'5 = x \Leftrightarrow 16^x = \frac{1}{2} : (2^4)^x = 2^{-1} : 2^{4x} = 2^{-1} : 4x = -1 : x = -\frac{1}{4}$
- e) $\log_{10} 0'00001 = x \Leftrightarrow 10^x = 0'00001 : 10^x = 10^{-5} \Leftrightarrow x = -5$
- f) $\log_x 125 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^{3/2} = 125 : x = (5^3)^{2/3} = 5^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 5^2 = 25$
- g) $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow 3^4 = x : x = 81$
- h) $\log_{343} \sqrt{7} = x \Leftrightarrow 343^x = \sqrt{7} : (7^3)^x = 7^{1/2} : 7^{3x} = 7^{1/2} \Rightarrow 3x = \frac{1}{2} : x = \frac{1}{6}$
- i) $\log_{5/3} \frac{27}{25} = x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{27}{25} : \left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{125}{27}\right)^{-1} : \left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5^3}{3^3}\right)^{-1} : \left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} \Leftrightarrow x = -3$
- j) $\ln 4x = 5 \Leftrightarrow 4x = e^5 : x = \frac{e^5}{4}$
- k) $\log_3 64 = x$ Como los logaritmos en base 3 no están tabulados ni aparecen en las calculadoras, es necesario hacer un cambio de base.

$$\log_3 64 = x \Leftrightarrow 3^x = 64$$

Tomando logaritmos decimales en ambos miembros de la igualdad, se despeja x.

$$3^x = 64 \Leftrightarrow \log 3^x \log 64 : x \log 3 = \log 64 : x = \frac{\log 64}{\log 3} = 3,79(\text{Calculadora})$$

4. Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$, calcular los logaritmos de los siguientes números:

- a) 5
- b) 125
- c) 0,25
- d) $\sqrt[4]{0,08}$
- e) $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$
- f) $\sqrt[4]{781,25}$
- g) $\frac{\sqrt{0,025}}{8}$
- h) $\sqrt[3]{0,02}$
- i) $\frac{3 \cdot 2^3 \cdot 0,64^5}{0,0125 \cdot \sqrt[4]{80^3}}$

Solución.

Aplicando las propiedades de los logaritmos, e “ideas felices” se transforman los logaritmos y se expresan en función de $\log 2$.

$$\text{a) } \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,3010 = 0,6990$$

$$\text{b) } \log 125 = \log 5^3 = 3 \log 5 = 3 \log \frac{10}{2} = 3(\log 10 - \log 2) = 3(1 - 0,3010) = 2,0970$$

$$\text{c) } \log 0,25 = \log \frac{1}{4} = \log 1 - \log 4 = 0 - \log 2^2 = -2 \log 2 = -2 \cdot 0,3010 = -0,6020$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \log \sqrt[4]{0,08} &= \log(8 \cdot 10^{-2})^{1/4} = \frac{1}{4} \log(2^3 \cdot 10^{-2}) = \frac{1}{4}(\log 2^3 + \log 10^{-2}) = \frac{1}{4}(3 \log 2 + (-2) \log 10) = \\ &= \frac{1}{4}(3 \log 2 - 2 \cdot 1) = \frac{1}{4}(3 \cdot 0,3010 - 2 \cdot 1) = -0,2745 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \log \frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \log \frac{1}{(2^4)^{1/3}} = \log 2^{-4/3} = -\frac{4}{3} \log 2 = -\frac{4}{3} \cdot 0,3010 = -0,4013$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \log \sqrt[4]{781,25} &= \log \left(\frac{78125}{100} \right)^{1/4} = \frac{1}{4} \log \frac{5^7}{10^2} = \frac{1}{4}(\log 5^7 - \log 10^2) = \frac{1}{4}(7 \log 5 - 2 \log 10) = \\ &= \frac{1}{4} \left(7 \log \frac{10}{2} - 2 \cdot 1 \right) = \frac{1}{4}[7(\log 10 - \log 2) - 2] = \frac{1}{4}[7(1 - \log 2) - 2] = \frac{1}{4}[7(1 - 0,3010) - 2] = 0,7232 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \log \frac{\sqrt{0,025}}{8} &= \log(25 \cdot 10^{-3})^{1/2} - \log 8 = \frac{1}{2} \log(25 \cdot 10^{-3}) - \log 2^3 = \\ &= \frac{1}{2}(\log 5^2 + \log 10^{-3}) - 3 \log 2 = \frac{1}{2}(2 \log 5 + (-3) \log 10) - 3 \log 2 = \frac{1}{2} \left(2 \log \frac{10}{2} - 3 \cdot 1 \right) - 3 \log 2 = \\ &= \frac{1}{2}[2(\log 10 - \log 2) - 3] - 3 \log 2 = \frac{1}{2}[2(1 - \log 2) - 3] - 3 \log 2 = 1 - \log 2 - \frac{3}{2} - 3 \log 2 = \\ &= -\frac{1}{2} - 4 \log 2 = -\frac{1}{2} - 4 \cdot 0,3010 = -1,704 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \log \sqrt[3]{0'02} &= \log(2 \cdot 10^{-2})^{1/3} = \frac{1}{3}(\log 2 + \log 10^{-2}) = \frac{1}{3}(\log 2 + (-2)\log 10) = \\ &= \frac{1}{3}(\log 2 - 2 \cdot 1) = \frac{1}{3}(0,3010 - 2) = -0,5663 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \log \frac{3'2^3 \cdot 0'64^5}{0'0125 \cdot \sqrt[4]{80^3}} &= \log \frac{(32 \cdot 10^{-1})^3 \cdot (64 \cdot 10^{-2})^5}{125 \cdot 10^{-4} \cdot 80^{3/4}} = \\ &= \log \left[(2^5 \cdot 10^{-1})^3 \cdot (2^6 \cdot 10^{-2})^5 \right] - \log \left(5^3 \cdot 10^{-4} \cdot (2^4 \cdot 5)^{3/4} \right) = \\ &= \log(2^5 \cdot 10^{-1})^3 + \log(2^6 \cdot 10^{-2})^5 - \left(\log 5^3 + \log 10^{-4} + \log(2^4 \cdot 5)^{3/4} \right) = \\ &= 3 \log(2^5 \cdot 10^{-1}) + 5 \log(2^6 \cdot 10^{-2}) - 3 \log 5 - (-4) \log 10 - \frac{3}{4} \log(2^4 \cdot 5) = \\ &= 3(\log 2^5 + \log 10^{-1}) + 5(\log 2^6 + \log 10^{-2}) - 3 \log \frac{10}{2} + 4 \cdot 1 - \frac{3}{4}(\log 2^4 + \log 5) = \\ &= 3(5 \log 2 + (-1) \log 10) + 5(6 \log 2 + (-2) \log 10) - 3(\log 10 - \log 2) + 4 - \frac{3}{4} \left(4 \log 2 + \log \frac{10}{2} \right) = \\ &= 3(5 \log 2 - 1 \cdot 1) + 5(6 \log 2 - 2 \cdot 1) - 3(1 - \log 2) + 4 - \frac{3}{4} \cdot 4 \log 2 - \frac{3}{4}(\log 10 - \log 2) = \\ &= 3(5 \log 2 - 1) + 5(6 \log 2 - 2) - 3(1 - \log 2) + 4 - 3 \log 2 - \frac{3}{4}(1 - \log 2) = \\ &= 15 \log 2 - 3 + 30 \log 2 - 10 - 3 + 3 \log 2 + 4 - 3 \log 2 - \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \log 2 = \frac{183}{4} \log 2 - \frac{51}{4} = \\ &= \frac{183}{4} \cdot 0,3010 - \frac{51}{4} = 1,0207 \end{aligned}$$

5. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

$$\text{a) } 2 \log x = \log \frac{x}{2} - \frac{7}{4}$$

Solución.

$$\begin{aligned} 2 \log x = \log \frac{x}{2} - \frac{7}{4} &: \log x^2 = \log \frac{x}{2} - \log 10^{7/4} : \log x^2 = \log \frac{x/2}{10^{7/4}} \\ \log x^2 = \log \frac{x}{2 \cdot 10^{7/4}} &\Leftrightarrow x^2 = \frac{x}{2 \cdot 10^{7/4}} : 2 \cdot 10^{7/4} x^2 = x : 2 \cdot 10^{7/4} x^2 - x = 0 \\ \left(2 \cdot 10^{7/4} x - 1 \right) \cdot x &= 0 : \begin{cases} x = 0 \\ 2 \cdot 10^{7/4} x - 1 = 0 : x = \frac{1}{2 \cdot 10^{7/4}} \end{cases} \end{aligned}$$

$x = 0$ no es válida porque no existe el logaritmo de 0.

$$\text{b) } \log(7x - 9)^2 + \log(3x - 4)^2 = 2$$

Solución.

$$\begin{aligned} \log(7x - 9)^2 + \log(3x - 4)^2 &= 2 : 2 \log(7x - 9) + 2 \log(3x - 4) = 2 \\ 2(\log(7x - 9) + \log(3x - 4)) &= 2 : \log(7x - 9) + \log(3x - 4) = 1 : \log[(7x - 9) \cdot (3x - 4)] = \log 10^1 \\ (7x - 9) \cdot (3x - 4) &= 10 : 21x^2 - 55x + 36 = 10 : 21x^2 - 55x + 26 = 0 \\ \text{Resolviendo la ecuación de 2º grado:} \end{aligned}$$

$$21x^2 - 55x + 26 = 0 : \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{13}{21} \end{cases}$$

$x = \frac{13}{21}$ no es válida porque no existen logaritmos de número negativos

$$7 \frac{13}{21} - 9 < 0 : 3 \frac{13}{21} - 4 < 0$$

c) $\log(25 - x^3) - 3 \cdot \log(4 - x) = 0$

Solución.

$$\log(25 - x^3) - 3 \cdot \log(4 - x) = 0 : \log(25 - x^3) = \log(4 - x)^3 \Leftrightarrow 25 - x^3 = (4 - x)^3$$

$$25 - x^3 = 4^3 - 3 \cdot 4^2 x + 3 \cdot 4x^2 - x^3 : 25 - x^3 = 64 - 48x + 12x^2 - x^3$$

Simplificando y ordenando se obtiene una ecuación de 2º grado.

$$12x^2 - 48x + 39 = 0 : \begin{cases} x = \frac{4 + \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{4 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Las dos son válidas.

d) $\log(3x - 1) - \log(2x + 3) = 1 - \log 25$

Solución.

$$\log(3x - 1) - \log(2x + 3) = 1 - \log 25 : \log \frac{3x - 1}{2x + 3} = \log 10^1 - \log 25$$

$$\log \frac{3x - 1}{2x + 3} = \log \frac{10}{25} \Leftrightarrow \frac{3x - 1}{2x + 3} = \frac{10}{25} : \frac{3x - 1}{2x + 3} = \frac{2}{5} : 5 \cdot (3x - 1) = 2 \cdot (2x + 3)$$

$$15x - 5 = 4x + 6 : x = 1$$

Válida

e) $\log x^3 = \log 6 + \log x$

Solución.

$$\log x^3 = \log 6 + \log x : \log x^3 = \log(6 \cdot x) \Leftrightarrow x^3 = 6x : x^3 - 6x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 6) = 0 : \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$

La única válida es $\sqrt{6}$. $x = 0$ no es válida porque no existe el logaritmo de cero, $x = -\sqrt{6}$ no es válida porque no existen logaritmos de números negativos.

f) $\log 8 + (x^2 - 5x + 7) \cdot \log 3 = \log 24$

Solución.

$$\log 8 + (x^2 - 5x + 7) \cdot \log 3 = \log 24 : \log 3^{x^2 - 5x + 7} = \log 24 - \log 8 : \log 3^{x^2 - 5x + 7} = \log \frac{24}{8} \Leftrightarrow$$

$$3^{x^2 - 5x + 7} = \frac{24}{8} : 3^{x^2 - 5x + 7} = 3^1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = 1 : x^2 - 5x + 6 = 0 : \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Las dos son válidas

g) $\log(5x + 4) - \log 2 = \frac{1}{2} \cdot \log(x + 4)$

Solución.

$$\log(5x + 4) - \log 2 = \frac{1}{2} \cdot \log(x + 4) : 2 \cdot [\log(5x + 4) - \log 2] = \log(x + 4)$$

$$2 \log(5x+4) - 2 \log 2 = \log(x+4) : \log(5x+4)^2 - \log 2^2 = \log(x+4)$$

$$\log \frac{(5x+4)^2}{2^2} = \log(x+4) \Leftrightarrow \frac{(5x+4)^2}{2^2} = x+4 : (5x+4)^2 = 4 \cdot (x+4)$$

$$25x^2 + 40x + 16 = 4x + 16 : 25x^2 + 36x = 0 : x \cdot (25x + 36) = 0 : \begin{cases} x = 0 \\ 25x + 36 = 0 : x = -\frac{36}{25} \end{cases}$$

$x = -\frac{36}{25}$ no es válida porque genera logaritmos negativos.

h) $(x^2 - x - 3) \cdot \log 4 = 3 \cdot \log \frac{1}{4}$

Solución.

$$(x^2 - x - 3) \cdot \log 4 = 3 \cdot \log \frac{1}{4} : \log 4^{x^2 - x - 3} = \log \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Leftrightarrow 4^{x^2 - x - 3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$4^{x^2 - x - 3} = 4^{-3} \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = -3 : x^2 - x = 0 : x \cdot (x - 1) = 0 : \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 : x = 1 \end{cases}$$

Válidas las dos soluciones.

i) $\frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$

Solución.

$$\frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2 : \log(16 - x^2) = 2 \log(3x - 4) : \log(16 - x^2) = \log(3x - 4)^2 \Leftrightarrow 16 - x^2 = (3x - 4)^2$$

$$16 - x^2 = 9x^2 - 24x + 16 : 10x^2 - 24x = 0 : x \cdot (10x - 24) = 0 : \begin{cases} x = 0 \\ 10x - 24 = 0 : x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} \end{cases}$$

j) $2 \log x - \log(x - 16) = 2$

Solución.

$$2 \log x - \log(x - 16) = 2 : \log x^2 - \log(x - 16) = \log 10^2 : \log x^2 - \log(x - 16) = \log 10^2$$

$$\log \frac{x^2}{x - 16} = \log 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x - 16} = 100 : x^2 = 100 \cdot (x - 16) : x^2 - 100x + 1600 = 0 : \begin{cases} x = 20 \\ x = 80 \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas

k) $(x^2 - 4x + 7) \cdot \log 5 + \log 16 = 4$

Solución.

$$(x^2 - 4x + 7) \cdot \log 5 + \log 16 = 4 : \log 5^{x^2 - 4x + 7} = \log 10^4 - \log 16 : \log 5^{x^2 - 4x + 7} = \log \frac{10000}{16}$$

$$\log 5^{x^2 - 4x + 7} = \log 625 \Leftrightarrow 5^{x^2 - 4x + 7} = 625 : 5^{x^2 - 4x + 7} = 5^4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 7 = 4$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 : \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas

l) $\log(2^{2-x})^{2+x} + \log 1250 = 4$

Solución.

$$\log(2^{2-x})^{2+x} + \log 1250 = 4 : \log 2^{(2-x)(2+x)} = \log 10^4 - \log 1250$$

$$\log 2^{4-x^2} = \log \frac{10000}{1250} \Leftrightarrow 2^{4-x^2} = \frac{10000}{1250} : 2^{4-x^2} = 8 : 2^{4-x^2} = 2^3 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 3$$

$$x^2 = 1 : x = \pm 1$$

Las dos soluciones son válidas

$$m) \frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2$$

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2 & : \log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x) \\ \log[2 \cdot (11 - x^2)] = \log(5 - x)^2 & \Leftrightarrow 2 \cdot (11 - x^2) = (5 - x)^2 : 22 - 2x^2 = 5^2 - 10x + x^2 \\ 3x^2 - 10x + 3 = 0 & : \begin{cases} x = 3 \\ x = 1/3 \end{cases} \end{aligned}$$

Las dos soluciones son válidas

$$n) \log x^2 - \log \frac{10x + 11}{10} = 1$$

Solución.

$$\begin{aligned} \log x^2 - \log \frac{10x + 11}{10} = 1 & : \log x^2 = \log 10^1 + \log \frac{10x + 11}{10} \\ \log x^2 = \log \left(10 \cdot \frac{10x + 11}{10} \right) & \Leftrightarrow x^2 = 10 \cdot \frac{10x + 11}{10} : x^2 = 10x + 11 \\ x^2 - 10x - 11 = 0 & : \begin{cases} x = -1 \\ x = 11 \end{cases} \end{aligned}$$

$x = 11$ no es válida porque genera un logaritmo negativo

$$o) 2 \log x - \log(x + 6) = 3 \log 2$$

Solución.

$$\begin{aligned} 2 \log x - \log(x + 6) = 3 \log 2 & : \log x^2 - \log(x + 6) = \log 2^3 \\ \log \frac{x^2}{x + 6} = \log 2^3 & \Leftrightarrow \frac{x^2}{x + 6} = 8 : x^2 = 8x + 48 : x^2 - 8x - 48 = 0 : \begin{cases} x = -4 \\ x = 12 \end{cases} \end{aligned}$$

$x = -4$ no es válida porque genera un logaritmo negativo

$$p) 2 \lg x - \lg(x - 16) = 2$$

Solución.

$$\begin{aligned} 2 \lg x - \lg(x - 16) = 2 & : \log x^2 - \log(x - 16) = \log 10^2 \\ \log \frac{x^2}{x - 16} = \log 100 & \Rightarrow \frac{x^2}{x - 16} = 100 : x^2 = 100x - 1600 : x^2 - 100x + 1600 = 0 : \begin{cases} x = 20 \\ x = 80 \end{cases} \end{aligned}$$

Las dos soluciones son válidas

6. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas

$$a) \begin{cases} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases} = \begin{cases} x - y = 15 \\ \log(x \cdot y) = \log 10^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{cases} : x = y + 15 : \{(y + 15) \cdot y = 100$$

$$y^2 + 15y - 100 = 0 : \begin{cases} y = -20 \\ y = 5 \Rightarrow x = 5 + 15 = 20 \end{cases}$$

$x = 20; y = 5$, es la única solución válida. No existen logaritmos negativos.

$$b) \begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log \frac{x}{y} = \log 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \frac{x}{y} = 10 \end{cases} : x = 10y : (10y)^2 - y^2 = 11$$

$$99y^2 = 11 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow x = \mp \frac{10}{3}$$

$$c) \begin{cases} \log_x(y-18) = 2 \\ \log_y(x+3) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} \log_x(y-18) = 2 \\ \log_y(x+3) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y-18 \\ y^{\frac{1}{2}} = x+3 \end{cases} = \begin{cases} x^2 = y-18 \\ y = (x+3)^2 \end{cases} : x^2 = (x+3)^2 - 18$$

$$x^2 = x^2 + 6x + 9 - 18 : 6x - 9 = 0 : x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{3}{2} + 3\right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$d) \begin{cases} \log x - \log 5 = 3 \log 5 \\ \log x^3 - \log y^2 = \log 2^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x - \log 5 = 3 \log 5 \\ \log x^3 + \log y^2 = \log 2^4 \end{cases} = \begin{cases} \log x = 4 \log 5 \\ \log(x^3 \cdot y^2) = \log 2^4 \end{cases} = \begin{cases} \log x = \log 5^4 \\ \log(x^3 \cdot y^2) = \log 2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^4 \\ x^3 \cdot y^2 = 2^4 \end{cases}$$

$$(5^4)^3 \cdot y^2 = 2^4 : y^2 = \frac{2^4}{5^{12}} : y = \sqrt{\frac{2^4}{5^{12}}} = \frac{2^2}{5^6}$$

$$e) \begin{cases} (x+y)\log 2 = (x-y)\log 4 \\ xy \log 3 = \log 531441 \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} (x+y)\log 2 = (x-y)\log 4 \\ xy \log 3 = \log 531441 \end{cases} = \begin{cases} \log 2^{(x+y)} = \log 4^{(x-y)} \\ \log 3^{xy} = \log 3^{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{(x+y)} = 4^{(x-y)} \\ 3^{xy} = 3^{12} \end{cases} = \begin{cases} 2^{(x+y)} = 2^{2(x-y)} \\ 3^{xy} = 3^{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{(x+y)} = 2^{2(x-y)} \\ 3^{xy} = 3^{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2(x-y) \\ xy = 12 \end{cases} = \begin{cases} x-3y = 0 \\ xy = 12 \end{cases} : x = 3y : 3y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{12}{3}} = \pm 2$$

- Si $y = 2 \Rightarrow x = \frac{12}{2} = 6$ Válida
- Si $y = -2 \Rightarrow x = \frac{12}{-2} = -6$ Válida

$$f) \begin{cases} \log(x+y) = 2 \log 3 \\ x \log 2 + y \log 3 = \log 2592 \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} \log(x+y) = 2 \log 3 \\ x \log 2 + y \log 3 = \log 2592 \end{cases} = \begin{cases} \log(x+y) = \log 3^2 \\ \log 2^x + \log 3^y = \log(2^5 \cdot 3^4) \end{cases} = \begin{cases} \log(x+y) = \log 3^2 \\ \log(2^x \cdot 3^y) = \log(2^5 \cdot 3^4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y = 3^2 \\ 2^x \cdot 3^y = 2^5 \cdot 3^4 \end{cases} : y = 9 - x : \left\{ 2^x \cdot 3^{9-x} = 2^5 \cdot 3^4 : \left\{ 2^x \cdot \frac{3^9}{3^x} = 2^5 \cdot 3^4 : \left\{ \frac{2^x}{3^x} = \frac{2^5 \cdot 3^4}{3^9} \right. \right. \right.$$

$$\left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2^5}{3^5} : \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \Leftrightarrow x = 5 : y = 9 - 5 = 4 : \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} \log_x(y+8) = 2 \\ \log_y(x-4) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} \log_x(y+8) = 2 \\ \log_y(x-4) = \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} x^2 = y+8 \\ y^{1/2} = x-4 \end{cases} = \begin{cases} x^2 = y+8 \\ y = (x-4)^2 \end{cases} : x^2 = (x-4)^2 + 8$$

$$x^2 = x^2 - 8x + 16 + 8 : 24 - 8x = 0 : x = \frac{24}{8} = 3 \Rightarrow y = (3-4)^2 = 1$$

h)
$$\begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 33 \\ e^x \cdot e^y = e^{11} \end{cases}$$

Solución.

Aplicando las propiedades de los logaritmos y exponenciales se transforma el sistema.

$$\begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 33 \\ e^x \cdot e^y = e^{11} \end{cases} = \begin{cases} \log a + \log b = \log(a \cdot b) \\ a^n \cdot a^m = a^{n+m} \end{cases} = \begin{cases} \log[(x+y) \cdot (x-y)] = \log 33 \\ e^{x+y} = e^{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log[(x+y) \cdot (x-y)] = \log 33 \\ e^{x+y} = e^{11} \end{cases} = \begin{cases} \log f(x) = \log g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \\ a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \end{cases} = \begin{cases} (x+y) \cdot (x-y) = 33 \\ x+y = 11 \end{cases}$$

Sustituyendo $x+y$ por 11 en la primera ecuación se obtiene un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} 11 \cdot (x-y) = 33 \\ x+y = 11 \end{cases} = \begin{cases} x-y = 3 \\ x+y = 11 \end{cases} : \text{Por reducción: } \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 10.000 \\ (x-y)^{\log(x+y)} = 1.000 \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 10.000 \\ (x-y)^{\log(x+y)} = 1.000 \end{cases} = \begin{cases} \log(x^2 - y^2) = \log 10.000 \\ \log((x-y)^{\log(x+y)}) = \log 1.000 \end{cases} = \begin{cases} \log((x+y)(x-y)) = 4 \\ \log(x+y) \cdot \log((x-y)) = 3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = 4 \\ \log(x+y) \cdot \log((x-y)) = 3 \end{cases}$$

Para resolver el sistema se hace un cambio de variable:

$$\begin{cases} a = \log(x+y) \\ b = \log(x-y) \end{cases} : \begin{cases} a+b = 4 \\ a \cdot b = 3 \end{cases} : b = 4-a : \{a \cdot (4-a) = 3$$

Ordenando se obtiene una ecuación de 2º grado que nos permite encontrar la solución.

$$a^2 - 4a + 3 = 0 : \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = 4-1 = 3 \\ a = 3 \Rightarrow b = 4-3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Si: } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} : \begin{cases} \log(x+y) = 1 \\ \log(x-y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 10^1 \\ x-y = 10^3 \end{cases} : \begin{cases} x = 505 \\ y = -495 \end{cases} \text{ Válida}$$

$$\text{Si: } \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} : \begin{cases} \log(x+y) = 3 \\ \log(x-y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 10^3 \\ x-y = 10^1 \end{cases} : \begin{cases} x = 505 \\ y = 495 \end{cases} \text{ Válida}$$

$$\text{j) } \begin{cases} 2 \log x - \log y = 5 \\ \log x - 4 = -\log y \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} 2 \log x - \log y = 5 \\ \log x - 4 = -\log y \end{cases} = \begin{cases} \log x^2 - \log y = 5 \\ \log x + \log y = 4 \end{cases} = \begin{cases} \log \frac{x^2}{y} = \log 10^5 \\ \log(x \cdot y) = \log 10^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{y} = 10^5 \\ x \cdot y = 10^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} = 10^5 \\ x \cdot y = 10^4 \end{cases} : y = 10^{-5} x^2 : \{x \cdot 10^{-5} x^2 = 10^4 : x^3 = 10^9 : x = \sqrt[3]{10^9} = 10^3 \Rightarrow y = 10^{-5} \cdot (10^3)^2 = 10$$

$$\text{k) } \begin{cases} y \log x = x \log y \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} y \log x = x \log y \\ x^2 = y^2 \end{cases} = \begin{cases} \log x^y = \log y^x \\ x^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^y = y^x \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

$x = y \in \mathbb{R}^+$ Por definición solo existen logaritmos de números positivos