## Sistema de Ecuaciones Logarítmicas

**Marco Teórico:**
Para resolver sistemas de ecuaciones logarítmicas tomaremos en cuenta la definición y las propiedades de los logaritmos. Para la resolución del sistema utilizaremos el mismo procedimiento que indicamos para resolver una ecuación logarítmica.
Veamos ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones logarítmicas.

**Ejemplo 1.**

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 & \text{(I)} \\ \log x - \log y = 1 & \text{( II)} \end{cases}$$

**Paso 1**: En la segunda ecuación aplicamos la propiedad del cociente de un logaritmo, en el primer miembro y en segundo tenemos en cuenta que el logaritmo decimal de 10 es 1.

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log 10$$

**Paso 2**:Tomando en cuenta que ambos logaritmos tienen la misma base, lo igualamos, quedando de esta forma:

$$\frac{x}{y} = 10$$

Paso 3: Luego, despejamos “x”

$x = 10y$ le llamamos (a)

**Paso 4**: Sustituimos (a) en la Ecuación II

$$100y^2 - y^2 = 11 \qquad y^2 = 11/99 = 1/9$$

**$y_1 = 1/3$ ; $y_2 = -1/3$ ; $x = 10/3$**

**Ejemplo 2**.

Algunos sistemas se pueden **resolver** directamente **por el método de reducción.**

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \underline{\log x - \log y = 1} \end{cases} \\ 2\log x \qquad\quad = 4 \end{array}$$

**$\log x = 2$ $\qquad x = 10^2$ $\qquad x = 100$**

$$2 + \log y = 3$$

**$\log y = 1$ $\qquad y = 10^1$ $\qquad y = 10$**

**EJERCICIOS RESUELTOS**

1.

$$\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - y = 20 \end{cases}$$

$$\log(xy) = \log 100 \qquad xy = 100 \qquad x = \frac{100}{y}$$

**Paso1:** Aplicamos propiedades de los logaritmos

$$\frac{100}{y} - y = 20 \qquad y^2 + 20y - 100 = 0$$

**Paso 2:** Sustituimos en la ecuación II

$$y = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 400}}{2} = \frac{-20 \pm 20\sqrt{2}}{2} = -10 + 10\sqrt{2}$$

**Paso 3:** Aplicamos la ecuación de segundo grado

La solución del sistema de ecuaciones:

**y=10**$(\sqrt{2}-1)$ **x=10**$(\sqrt{2}+1)$

2. $\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

$\log(xy) = \log 2 \qquad xy = 2 \qquad x = \dfrac{2}{y}$

**Paso 1:** Aplicamos propiedad de los logaritmos.

$\left(\dfrac{2}{y}\right)^2 + y^2 = 5 \qquad y^4 - 5y^2 + 4 = 0$

**Paso 2:** Sustituimos en la ecuación II

$$y^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{cases} y^2 = 4 & \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases} \\ y^2 = 1 & \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

**Paso 3:** Aplicamos la ecuación de segundo grado.

**y=2** **x=1**

**y=1** **x=2**

**Paso 4 :** Obtenemos la solución del sistema de ecuación

3. $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\log x + 2\log y = 6 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$

**Paso 1**: Aplicamos el método de reducción

$4\log x = 5 \qquad \log x = \dfrac{5}{4} \qquad x = 10^{\frac{5}{4}} = 10\sqrt[4]{10}$

**Paso 2**: Sustituimos logaritmo x en la ecuación I.

$\dfrac{5}{4} + \log y = 3 \qquad \log y = \dfrac{7}{4} \qquad y = 10^{\frac{7}{4}} = 10\sqrt[4]{1000}$

**Paso 3:** Despejamos y. **y=**$10^{7/4}$

4. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

$\log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log 10$

**Paso 1:** Aplicamos propiedades de los logaritmos.

$\dfrac{x}{y} = 10 \qquad x = 10y$

**Paso 2:** Despejamos x.

$100y^2 - y^2 = 11$

$y^2=11/99 \quad =1/9$

**Paso 3:** Sustituimos en la ecuación I

**$y_1=1/3$ ; $y_{2}=-1/3$ ; $x=10/3$**

5. $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$
$$2\log x \qquad = 4$$

**Paso 1:** Restamos las ecuaciones.

$\log x = 2 \qquad x = 10^2 \qquad x = 100$

**Paso 2:** Despejamos x.
**Paso 3:** Sustituimos en la ecuación I.

$2 + \log y = 3$

**$\text{Logy}=1 \qquad y=10^1 \qquad y=10$**

6. $\begin{cases} \log_x (y-18) = 2 \\ \log_y (x+3) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 = y - 18 \\ y^{\frac{1}{2}} = x + 3 \end{cases}$$

**Paso 1:** Aplicamos las propiedades de los logaritmos.
**Paso 2:** Despejamos y sustituimos en la ecuacion I.

$y = (x+3)^2 \qquad x^2 = (x+3)^2 - 18$

**$X=3/2 \qquad y=81/4$**

**Paso 3:** Obtenemos la solución del sistema.

7. $\begin{cases} x - y = 15 \ (I) \\ logx + logy = log10^{2} \ (II) \end{cases}$

Solución :

$\begin{cases} x - y = 15 \\ x.y = 100 \end{cases}$ Aplicamos propiedad de los logaritmos en ecuación (II)

Lo cual implica :

**Paso 1:** Despejando X en la ecuación I.

x=15+y (a)

**Paso 2**:Sustituyendo(a) en la ecuación II

(15+y).y=100

15y $+y^2$=100

**Paso 3**: Igualando a cero.

$y^2+15y-100=0$

**Paso 4:**Aplicando la ecuación de segundo grado, se obtiene:

Y=5 Es solución

Y=-20 No es solución, ya que no existe un logaritmo negativo.

**Paso 5:** Para obtener el valor de x, se sustituye (5) en (a).

X=15+y

**X=15+5=20**

8. $\begin{cases} logx + logy = 3\ (I) \\ logx - logy = -1 (II) \end{cases}$

Solución:

**Paso 1:** Se suman las dos ecuaciones.

2logx=2

**Paso 2:** Dividimos por 2 ambos miembros, y se resuelve

Logx=1 , x=10 (a)

**Paso 3:** Sustituimos (a) en la ecuación (I)

1+logy=3

Logy=3-1

Logy=2 ,$y=10^2$ **; y= 100**

9. $\begin{cases} x - y = 21 \\ logx + logy = 2 \end{cases}$

Solución:

**Paso 1**: Aplicando la propiedad de los logaritmos para transformar el sistema en otro algebraico.

$$\begin{cases} x - y = 21 \\ logx + logy = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 21 \\ \log (x.y) = 2 \end{cases}$$

Entonces: log xy=2

**Paso 2**:Como el log 100=2, escribimos la ecuación así:

Log xy=log100 ,de donde xy=100

**Paso 3:** Pasamos así al sistema algebraico siguiente:

$$x - y = 21\ (I)$$
$$x.y = 100\ (II)$$

**Paso 4**:Despejamos "y" de la ecuación (I)

x-y= 21

x-21=y (a)

**Paso 5:**Sustituimos (a)en la ecuación II

X(x-21)=100

$X^2$ -21x=100

$X^2$-21x-100=0 Resolvemos el sistema de ecuación.

**Paso 6:** Se obtiene: x=-4, x=25 La raíz x=-

4 NO ES VALIDA. Obtenemos y de la Ecuación (I)
Y=x-21
Y=25-21 ;y =4
La solución del sistema es:
**X=25 ;y=4**

10 $logx + 3logy = 5$
$log\frac{x}{y} = 1$

Solución:
El sistema es equivalente a:
$$\begin{cases} logx + 3logy = 5\ (I) \\ logx - logy = 1(II) \end{cases}$$
**Paso 1:** Aplicando el método de reducción, multiplicamos por (-1) la ecuación II, y restamos las dos ecuaciones.
4 logy=4
**Paso 2:**Dividimos por 4 y resulta:
Logy=1 ;y=10
**Paso 3:**Sustituyendo en la ecuación II
Logx-logy=1
Logx-1=1
Logx=1+1 ,logx=2 ;x=100
**Paso 4**:Solución del sistema:
**X=100 ,y=10**