

Examen Trigonometría y Números complejos

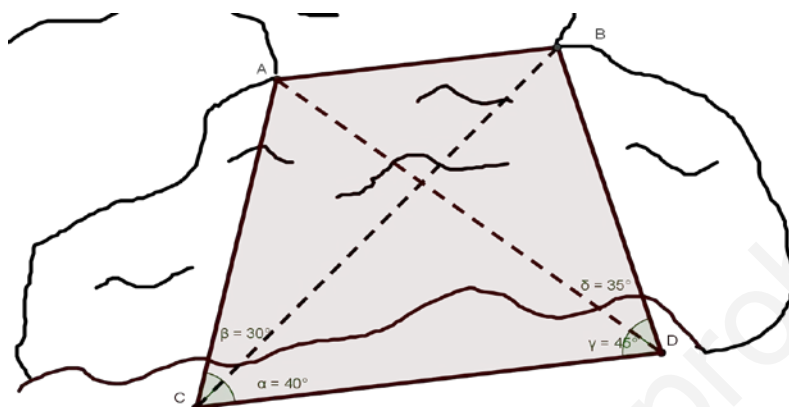
Nombre: _____ Fecha: _____

1.- (2 puntos) Resuelve:

a)
$$\begin{cases} 3 - 2x \leq 5 \\ -x^2 + 7x + 8 \geq 0 \end{cases}$$

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2 \leq 0$

2.- (1,5 puntos) Calcula la distancia entre dos puntos A y B que están en la orilla del mar. Desde los puntos C y D, situados en una explanada cercana, se han tomado los siguientes datos:



$\overline{CD} = 200m, \quad \widehat{ACB} = 30^\circ, \quad \widehat{BCD} = 40^\circ, \quad \widehat{ADC} = 45^\circ, \quad \widehat{BDA} = 35^\circ$

3.- (1,5 puntos) Los lados de un paralelogramo miden 18 cm y 32 cm y forman un ángulo de 52°. Halla la longitud de la diagonal.

4.- a) (1 punto) Resuelve la ecuación trigonométrica: $\text{sen}2x + 3\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2$

b) (1 punto) Demuestra la identidad: $\frac{\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)} = \frac{1}{\text{tg } b}$

5.- Dados los números complejos:

$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad z_2 = 2\sqrt{3} + 2i; \quad z_3 = 16_{240^\circ},$

a) (0,75 puntos) Expresa z_1 y z_2 en forma polar y z_3 en forma binómica.

b) (1 punto) Realiza: $z_1 \cdot z_2; \quad z_2 + z_3; \quad \frac{z_2}{z_3}; \quad (z_1)^6$

c) (0,5 puntos) Calcula $\sqrt[4]{z_3}$

6.- (0,75 puntos) Calcula a y b para que se verifique la igualdad:

$$\frac{3a - 9i}{3a + bi} = 5 + 4i$$

$$\textcircled{1} \text{ a) } \begin{cases} 3 - 2x \leq 5 \\ -x^2 + 7x + 8 \geq 0 \end{cases}$$

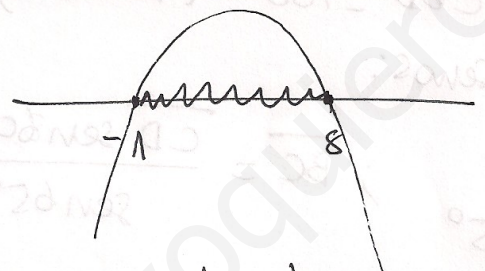
Resolvemos cada inecuación por separado.

• $3 - 2x \leq 5$; $-2x \leq 2$; $2x \geq -2$; $\boxed{x \geq -1}$

• $-x^2 + 7x + 8 \geq 0$. Resolvemos la ecuación asociada.
 $-x^2 + 7x + 8 = 0$; $x^2 - 7x - 8 = 0$.

$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2}$; $x = \frac{7 \pm 9}{2}$; $\begin{cases} \boxed{x = 8} \\ \boxed{x = -1} \end{cases}$

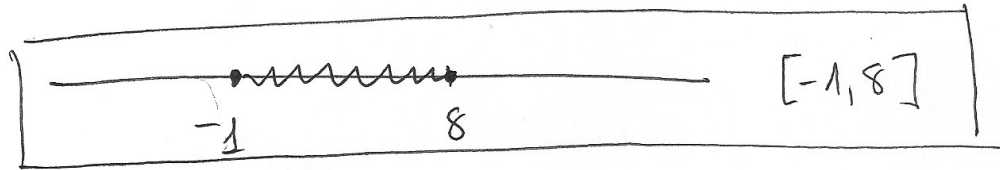
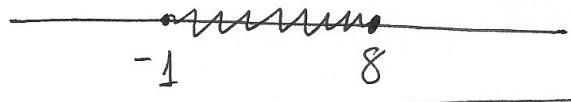
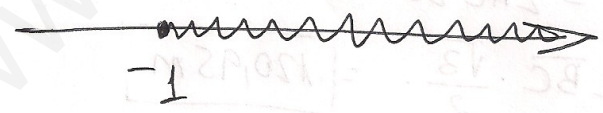
Resolvemos ahora la inecuación, dibujando la parábola.



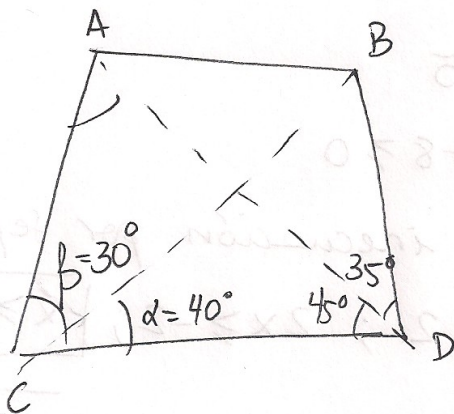
es en forma de \cap porque el coeficiente de x^2 es negativo.

$[-1, 8]$: solución 2ª inec.

Resolvemos el sistema viendo dónde coinciden las soluciones:



②



$$\begin{aligned}\widehat{ACB} &= 30^\circ \\ \widehat{BCD} &= 40^\circ \\ \widehat{ADC} &= 45^\circ \\ \widehat{BDA} &= 35^\circ \\ \overline{CD} &= 200 \text{ m.}\end{aligned}$$

$$\triangle ACD \quad \widehat{CAD} = 180 - (70 + 45) = 180 - 115 = 65^\circ$$

Teorema de los Senos.

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{\overline{CD}}{\text{sen } 65^\circ} ; \overline{AC} = \frac{\overline{CD} \text{ sen } 45^\circ}{\text{sen } 65^\circ} = \boxed{156,04 \text{ m}}$$

$$\triangle BCD \quad \widehat{CBD} = 180 - (40 + 80) = 60^\circ$$

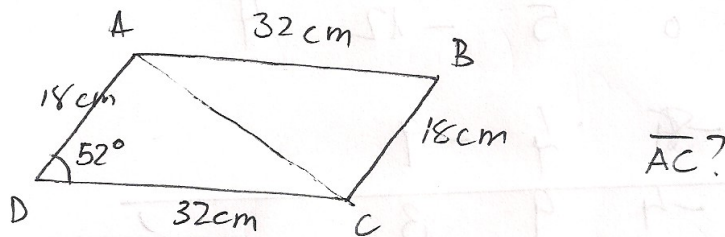
Teorema de los Senos:

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen } 80^\circ} = \frac{\overline{CD}}{\text{sen } 65^\circ} ; \overline{BC} = \frac{\overline{CD} \text{ sen } 80^\circ}{\text{sen } 65^\circ} = \boxed{217,32 \text{ m}}$$

$\triangle ABC$. Teorema del Coseno:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\overline{BC} \cos 30^\circ = \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\overline{BC} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{120,95 \text{ m}}\end{aligned}$$

③



$\triangle ACD$ Teorema del coseno:

$$\overline{AC}^2 = 18^2 + 32^2 - 2 \cdot 18 \cdot 32 \cos 52$$

$$\boxed{\overline{AC} = 25,27 \text{ cm}}$$

④ a) $\sin 2x + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2$;

$$2 \sin x \cos x + 3 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos(-x) + \cancel{\cos \frac{\pi}{2} \sin(-x)} = 2 ;$$

$$2 \sin x \cos x + 3 \cos x = 2.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 ; \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$2 \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \cos x + 3 \cos x = 2 ;$$

$$\left(2 \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \cos x\right)^2 = (2 - 3 \cos x)^2 ;$$

$$4(1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x = 4 + 9 \cos^2 x - 12 \cos x ;$$

$$(4 - 4 \cos^2 x) \cos^2 x = 4 + 9 \cos^2 x - 12 \cos x ;$$

$$-4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x = 4 + 9 \cos^2 x - 12 \cos x ;$$

$$4 \cos^4 x + 9 \cos^2 x - 4 \cos^2 x - 12 \cos x + 4 = 0 ;$$

$$4 \cos^4 x + 5 \cos^2 x - 12 \cos x + 4 = 0 ;$$

$$\cos x = z ; 4z^4 + 5z^2 - 12z + 4 = 0.$$

$$\operatorname{sen} 2x + 3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 2;$$

$$\operatorname{sen} 2x + 3 \operatorname{cos} x = 2;$$

$$2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x + 3 \operatorname{cos} x = 2;$$

$$\operatorname{sen} x = \pm \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 x}$$

$$2 \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 x} \operatorname{cos} x + 3 \operatorname{cos} x = 2;$$

$$\left(2 \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 x} \cdot \operatorname{cos} x \right)^2 = (2 - 3 \operatorname{cos} x)^2;$$

$$4 (1 - \operatorname{cos}^2 x) \cdot \operatorname{cos}^2 x = 4 - 12 \operatorname{cos} x + 9 \operatorname{cos}^2 x;$$

$$4 \operatorname{cos}^2 x - 4 \operatorname{cos}^4 x = 4 - 12 \operatorname{cos} x + 9 \operatorname{cos}^2 x;$$

$$4 \operatorname{cos}^4 x + 5 \operatorname{cos}^2 x - 12 \operatorname{cos} x + 4 = 0; \quad (\text{lo mismo habría}$$

$$\text{salido con } \operatorname{sen} x = -\sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 x}).$$

$$\text{Cambio de variable: } \operatorname{cos} x = z;$$

$$4z^4 + 5z^2 - 12z + 4 = 0;$$

Por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 0 & 5 & -12 & 4 \\ \hline & & & & & \end{array}$$

No sale con $z = \pm 1 \pm 2 \pm 4$

No sabemos calcular sus raíces.

(hasta aquí sería la puntuación máxima).

$$b) \frac{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)} = \frac{1}{\operatorname{tg} b} \quad \text{Varias formas,}$$

pero lo hacemos desarrollando los senos y cosenos.

$$\frac{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \cos(-b) + \cos a \operatorname{sen}(-b)}{\cos a \cos(b) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(-b) - (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b)} = \frac{1}{\operatorname{tg} b}?$$

$$\frac{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b - \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} = \frac{1}{\operatorname{tg} b}?$$

$$\frac{2 \operatorname{sen} a \cos b}{2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} = \frac{1}{\operatorname{tg} b}?$$

$$\cos b \operatorname{tg} b = \operatorname{sen} b?$$

$$\cos b \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} = \operatorname{sen} b? \quad \checkmark$$

$$5) a) z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad z_2 = 2\sqrt{3} + 2i; \quad z_3 = 16240^\circ.$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \boxed{1}$$

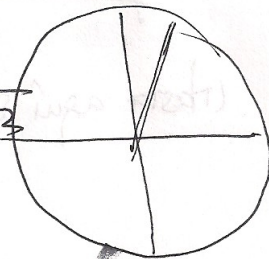
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$$

2 posibilidades para $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$

$$\alpha = 180 - 60; \quad \alpha = 120^\circ$$

$$\alpha = 360 - 60; \quad \alpha = 300^\circ$$

Por las coordenadas, sabemos que α es del 2º cuadrante, luego: $\boxed{\alpha = 120^\circ}$



Entonces, $z_1 = 1_{120^\circ}$

$$z_2 = 2\sqrt{3} + 2i;$$

$$|z_2| = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4.$$

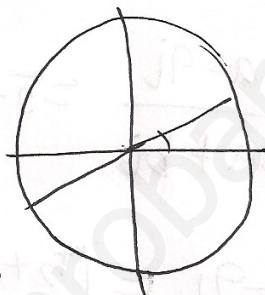
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Hay dos posibilidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = 30^\circ \\ \beta = 150^\circ \end{array} \right.$$

Sabemos que β

está en el 1er cuadrante (por la forma binómica) así que $\beta = 30^\circ$.



$$z_2 = 4_{30^\circ}$$

$$z_3 = a + bi = r \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha = 16 \cdot \frac{-1}{2} + i \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} =$$

$$b) \cdot z_1 \cdot z_2 = 1_{120^\circ} \cdot 4_{30^\circ} = 4_{150^\circ} = \left[-8 - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right]$$

• $z_2 + z_3$: la suma hay que hacerla en binómica.

$$(2\sqrt{3} + 2i) + \left(-8 - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left[2\sqrt{3} - 8 + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i \right]$$

$$\cdot \frac{z_2}{z_3} = \frac{4_{30^\circ}}{16_{240^\circ}} = \left(\frac{1}{4}\right)_{30-240} = \left(\frac{1}{4}\right)_{-210} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)_{150^\circ}$$

$$\cdot (z_1)^6 = (1_{120})^6 = 1_{720} = 1_{0^\circ}$$

$$c) \sqrt[4]{z_3} = \sqrt[4]{1b_{240^\circ}} = 2 \frac{240}{4} = \begin{cases} 2_{60^\circ} \\ 2_{150^\circ} \\ 2_{240^\circ} \\ 2_{300^\circ} \end{cases}$$

$$b) \frac{3a-9i}{3a+bi} = 5+4i$$

$$3a-9i = (5+4i)(3a+bi)$$

$$3a-9i = 15a+5bi+12ai-4b$$

$$15a-3a-4b=0 ; 12a-4b=0 \quad \boxed{b=3a}$$

$$5b+12a+9=0 ; 15a+12a+9=0 ;$$

$$27a = -9 ; a = \frac{-9}{27} ; \boxed{a = \frac{-1}{3}}$$