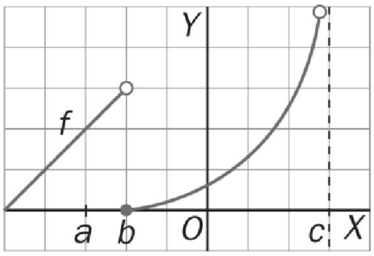
1) Dada la función de la figura, calcula:



a) $f(a)$ $f(b)$ y $f(c)$

b) Los límites laterales y el límite de la función en los puntos *a*, *b* y *c*.

2) Calcula los siguientes límites en el infinito:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+7^x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+x+1}{x^3+x^2+x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+1}{3x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3+3x^2-1}{2x^3+8}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{6x^3+2x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-7}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+1}{3x^7-1}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x}{2^x}$ j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x}{7x^2+1}$

k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-100x^{100}}{1+200x^{200}}$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9}{4^{-x}}$

m) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-2x$ n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+6}$

ñ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}$ o) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+1}$

p) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+5x+3}}{x^2-2x}$ q) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{5+x^2+\sqrt{9x^4+3x^3}}$

r) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+3}{x+2}\right)^{1-x}$ s) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+5}{2}-\dfrac{x^2-2}{x}\right)$

3) Calcula los siguientes límites de funciones:

a) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x+1}{(x+1)^4}$

c) $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{x+1}{(5-x)^3}$ d) $\lim\limits_{x\to7^-}\dfrac{x+2}{7-x}$

e) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x}{x-3}$ f) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x}{(x-4)^2}$

g) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ h) $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}$ j) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

4) Sea la función definida por $f(x)=\dfrac{x+3}{|x|-3}$.

a) ¿Cuál es el dominio de f?
b) Calcula si existen los siguientes límites

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to3^+}f(x)$ $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)$

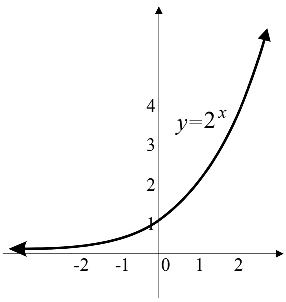
5) Teniendo en cuenta la continuidad de las funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas, calcula los siguientes límites:

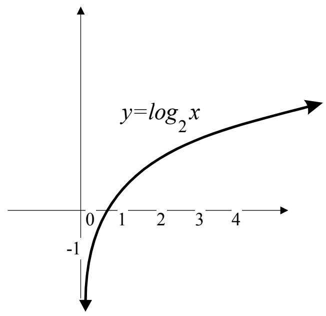
a) $\lim\limits_{x\to0}\left(\ln\dfrac{x^2+x}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\log_2\dfrac{2x+1}{x+1}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\cos(\pi+x)}{1-\operatorname{sen}x}$

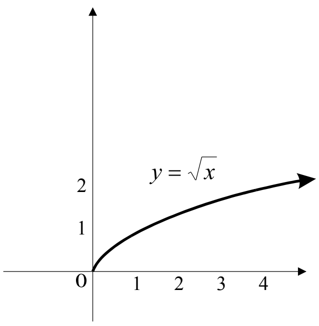
e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+2^{-x}}{1+2^x}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log_{1/2}x+\log_2\dfrac{1}{x}\right)$

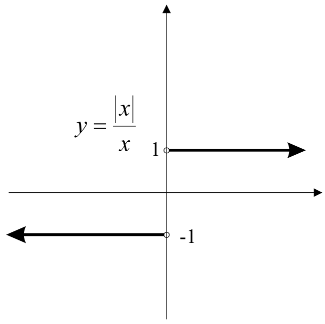
6) Fíjate en las gráficas de las siguientes funciones y di cual es el valor de los límites que se indican:



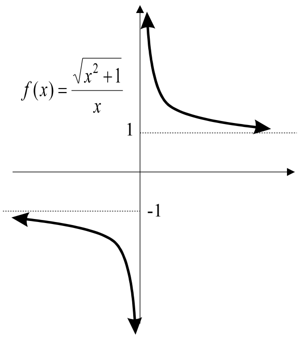


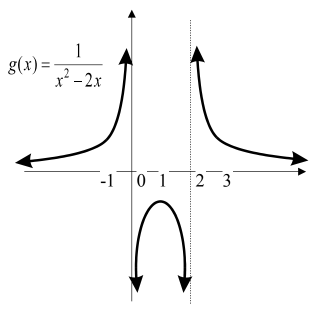
$\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=$ $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2 x=$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\log_2 x=$





$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=$ $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=$ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=$ $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=$





$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=$ $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=$

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=$ $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=$ $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=$

7) La famosa fórmula $m=\dfrac{m_0c}{\sqrt{c^2-v^2}}$ se debe a Einstein, y expresa la masa *m* de un cuerpo en función de su velocidad *v*, siendo *c* la velocidad de la luz (300.000 km/s) Calcula el límite de la masa *m* cuando *v* tiende a c^- e interpreta el resultado.

8) Se ha estimado que la población de zorros de una región se rige por la fórmula: $z(t)=100\dfrac{6t^2+3}{2+t^2}$

Donde $z(t)$ representa el número de zorros y t es el tiempo transcurrido, en meses.
El veterinario de la región ha observado que, en los 6 primeros meses, la población ha aumentado. Investiga si el crecimiento será indefinido, si tenderá a estabilizarse la población o si tenderá a disminuir.

9) Si $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=3$, determinar $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

10) Calcula los siguientes límites resolviendo las posibles indeterminaciones:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^3-9x}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{2x-4}\right)^{-2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^2-1}{2x}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x-3}$ f) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-ax}{x^2+ax-2a^2}$

g) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+10x+12}{x^3+2x^2-2x+3}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x-1}$

i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x^4-a^4}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^3-8}{x}$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+2}{x-1}-\dfrac{x^2+2x}{x+1}$ l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-8x^2+7x-2}$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-x\right)$ n) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-2x+1\right)$

ñ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{x-2}$ o) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$

p) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$ q) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2+x-6}$

r) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ s) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^4+5}{(x^2-2)(2x^2-1)}$

t) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+1}$ u) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x^3+5}{x+2}-\dfrac{4x^3-x}{x-2}\right)$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2-1}-x}{x^2-3x+2}$ w) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{16x^2+4x}-4x\right)$

x) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{5+x^2+\sqrt{9x^4+3x^3}}$ y) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+3}}{x^2-6x+9}$

z) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}$ z´) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}}\dfrac{\sqrt{3x^2+7}}{x}$

11) Si $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=5$ hallar los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

12) Para el valor indicado de *a*, justifica si existe o no $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

a) $a=2$, $f(x)=\begin{cases}3x & \text{si } x\le 2\\ x^2 & \text{si } x>2\end{cases}$

b) $a=2$, $f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{si } x\le 2\\ 4-2x & \text{si } x>2\end{cases}$

c) $a=-3$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-3x} & \text{si } x<-3\\ \sqrt[3]{x+2} & \text{si } x\ge -3\end{cases}$

d) $a=-3$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{9}{x^2} & \text{si } x<-3\\ 4+x & \text{si } x\ge -3\end{cases}$

e) $a=0$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+x}{2-3x} & \text{si } x\ne 0\\ 2 & \text{si } x=0\end{cases}$

f) $a=1$, $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x<1\\ 2 & \text{si } x=1\\ 4-x^2 & \text{si } x>1\end{cases}$

13) Calcula razonadamente $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x+1|-|x-1|}{x}$

14) Determinar los valores de a para los cuales existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, siendo:

$$f(x)=\begin{cases}2-x & \text{si } x<-1\\ x & \text{si } -1\le x<1\\ (x-1)^2 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

15) Halla los siguientes límites de potencias, resolviendo las posibles indeterminaciones:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3+2\right)^{-7x+55}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+3}{x+2}\right)^{1-x}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x+6}\right)^{\frac{3x}{2}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3+3}{x^2+1}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1-3x}{4-3x}\right)^{x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1-x^2}{x+1}\right)^{\frac{x+5}{x}}$ h) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+x-1}\right)^{2x}$ j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3-5}{x^3}\right)^{2x^2-1}$

k) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ l) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)^{x}$

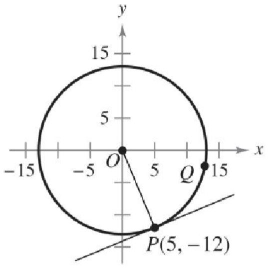
m) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{3x+2}{2x+3}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ n) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+3}{x+2}\right)^{1-x}$

ñ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{8x^3-1}{2x^3+x+1}\right)^{\frac{x}{2x-1}}$ o) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x^2+5}{3x^2+1}\right)^{x^2}$

16) Halla el valor de a para que se cumpla:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+a}{x-a}-\frac{x^2-a}{x+a}\right]=6$$

17) Sea $P(5,-12)$ un punto de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=169$.



a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que une los puntos P y $O(0,0)$?

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en P.

c) Sea $Q(x,y)$ otro punto cualquiera del cuarto cuadrante. Hallar la pendiente m_x de la recta que une P y Q en términos de x.

d) Calcula $\lim_{x\to5} m_x$ e indica qué relación existe con el resultado del apartado b)

18) Indica si son continuas en $x=3$ las siguientes funciones. Si no es continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta:

a) $f(x)=(x-3)(x-4)$

b) $g(x)=x^2-9$

c) $h(x)=\dfrac{3}{x-3}$

d) $g(t)=\sqrt{t-4}$

i) $h(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$

j) $h(t)=\dfrac{\sqrt[3]{(t-3)^4}}{t-3}$

k) $f(t)=|t-3|$

l) $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$

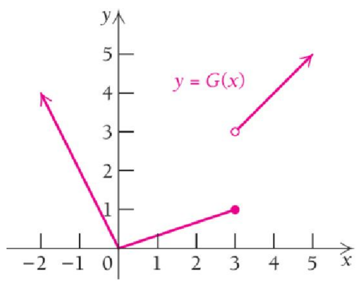
m) $h(x)=\dfrac{21-7x}{x-3}$

n) $r(t)=\begin{cases}\dfrac{t^3-27}{t-3} & \text{si } t\neq 3\\ 27 & \text{si } t=3\end{cases}$

ñ) $f(t)=\begin{cases}t-3 & \text{si } t\leq 3\\ 3-t & \text{si } t>3\end{cases}$

o) $g(t)=\begin{cases}t^2-9 & \text{si } t\leq 3\\ (3-t)^2 & \text{si } t>3\end{cases}$

19) Sea $G(x)$ la función cuya gráfica se muestra.



a) Halla $\lim_{x\to3^-} G(x)$

b) Halla $\lim_{x\to3^+} G(x)$

c) Halla $\lim_{x\to3} G(x)$

d) Halla $G(3)$

e) ¿Es G continua en $x=3$? ¿Por qué?

f) ¿Es G continua en $x=0$? ¿Por qué?

g) ¿Es G continua en $x=2{,}99$? ¿Por qué?

20) Razonar si la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ es o no continua en los puntos $x_0=1$; $x_1=2$; $x_2=0$. Indica además los tipos de discontinuidades que presenta.

21) Hallar b para que la función $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-b}{b+1} & \text{si } x<0\\ x^2+b & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ sea siempre continua.

22) Estudia la continuidad en $x=9$ de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} & \text{si } x\neq 9\\ 6 & \text{si } x=9\end{cases}$$

23) Estudia y clasifica las discontinuidades de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}1+2^{x+1} & \text{si } x\leq 0\\ (x-1)^2-1 & \text{si } 0<x\leq 1\\ 1/x & \text{si } 1<x\leq 2\\ x/(x-2) & \text{si } 2<x<\infty\end{cases}$$

24) Dada la función: $f(x)=\begin{cases}-x^2+a & \text{si } x<-1\\ x^2-4 & \text{si } -1\leq x<2\\ \ln(x-b) & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

Halla el valor de las constantes a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

25) Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}c & \text{si } x=-3\\ \dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} & \text{si } |x|<3\\ d & \text{si } x=3\end{cases}$$

Hallar c y d para que f sea continua en $[-3,3]$.

26) La fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre un objeto que tiene masa m y que se encuentra a una distancia r del centro de la Tierra es:

$$g(r)=\begin{cases}\dfrac{GMmr}{R^3} & \text{si } r<R\\ \dfrac{GMm}{r^2} & \text{si } r\geq R\end{cases}$$

Donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa de la *Tierra* y R el radio de la Tierra. ¿Es g una función continua de r?

27) Dada la función $F(x)=\begin{cases}x^2+2x-a & \text{si } x<0\\ 2x+b & \text{si } 0<x<1\\ x+3 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

Halla el valor de a y b para que sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Calcula además $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$

28) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^5+3x^2+x & \text{si } x\in[-1,0) \\ 3x^4+x^2+ax & \text{si } x\in[0,1] \end{cases}$

Demostrar que *f* es continua para cualquier valor de *a*.

29) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$g(t)=\begin{cases} \dfrac{t}{1-|t|} & \text{si } t=\pm 1 \\ 0 & \text{si } t\neq \pm 1 \end{cases}$$

30) Estudia la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x<-3 \\ x^2-10 & \text{si } -3\le x<1 \\ kx+2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

y halla el valor de *k* para que sea continua en $x=1$.

31) Encontrar el valor que debe tener *k* para que la siguiente función sea continua en el punto $x_0=4$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{5+x}-3}{x-4} & \text{si } x\neq 4 \\ k & \text{si } x=4 \end{cases}$$

32) Halla *a* y *b* para que sea continua en todo $\mathbb{R}$ la función:

$$f(x)=\begin{cases} a(x^2-2) & \text{si } x\le 0 \\ bx+1 & \text{si } 0<x<1 \\ 1/x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

33) a) El espacio *e* recorrido por un móvil en función del tiempo *t* viene dado por la siguiente función:

$$e(t)=\begin{cases} 3t^2 & \text{si } 0\le t<2 \\ -2t+a & \text{si } 2\le t\le 4 \\ -t^2+3t+b & \text{si } t>4 \end{cases}$$

Halla el valor de *a* y *b* para que sea continua para todos los valores de $t>0$.

b) Calcula: $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e(t)}{t^2+1}$

34) a) Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-5x+6} & \text{si } x<2 \\ ax^2+3 & \text{si } 2\le x\le 4 \\ e^{x-4}+b & \text{si } x>4 \end{cases}$$

Calcula el valor de las constantes *a* y *b* para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Con los valores antes calculados, halla las asíntotas horizontales de dicha función.

35) Hallar los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=x-\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x}{x^2-x}$ y decir si alguno de ellos es una discontinuidad evitable.

36) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \ln(x^2-3x+2) & \text{si } x<0 \\ -x^2+2x & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 2^x+ax & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) ¿Es $f(x)$ continua en $x=0$?

b) Halla a para que sea continua en $x=2$.

37) Indica en qué puntos no es continua la función $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x-2}$ y halla sus asíntotas

38) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-x+b}{2x^3-ax^2-2x}$ averigua a y b sabiendo que en $x=2$ presenta una discontinuidad evitable. A continuación calcula y clasifica las restantes discontinuidades.

39) Calcula las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3x^{10}+8x^7-1$

b) $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^2-25}$

c) $f(x)=\dfrac{3x^4+2x-1}{x^4+1}$

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3}$

e) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3+2x^2-5x-6}$

f) $f(x)=\log(x^2-16)$

g) $f(x)=\pi+\operatorname{arc\,tg} x$

h) $f(x)=e^{x-1}+2$

40) Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas.

a) $y=\dfrac{4x^2+5}{2x+8}$

b) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

c) $y=\dfrac{x^2+2}{x-2}$

d) $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

e) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$

f) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$

g) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x<2 \\ x-1 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

h) $y=\dfrac{2x-x^2}{x-3}$

41) La recta $y=2x-3$ es una asíntota de la función $f(x)=\dfrac{ax^2+3}{bx+ab}$. Halla los valores de *a* y *b*.