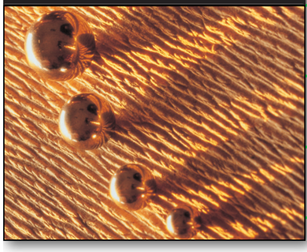
UNIDAD 8 INICIACIÓN A LAS INTEGRALES

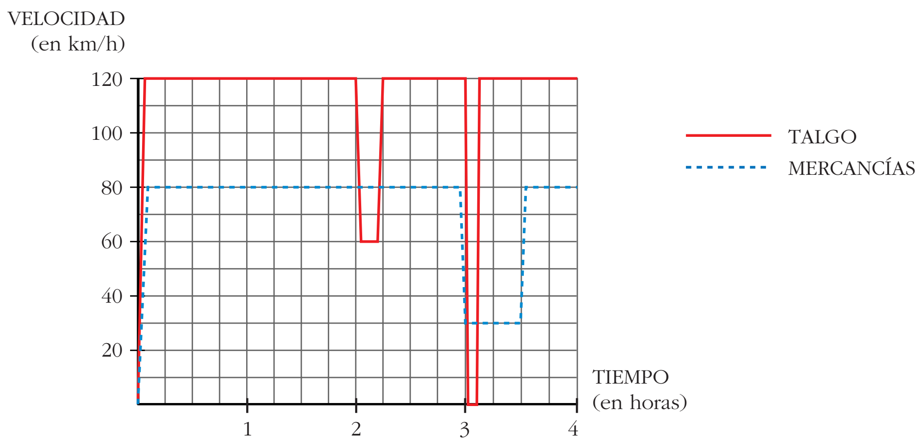


Página 206

1. Dos trenes

Un Talgo y un tren de mercancías salen de la misma estación, por la misma vía y en idéntica dirección, uno tras otro, casi simultáneamente.

Éstas son las gráficas TIEMPO - VELOCIDAD de ambos movimientos.



Como podemos ver en la gráfica, el Talgo, a las dos horas, reduce su velocidad: ¿A qué puede deberse?

¿Por qué no aminora la marcha también el otro tren?

A las tres horas ambos trenes modifican su marcha: el Talgo para durante breves minutos, mientras que el de mercancías va muy despacio durante media hora.

- **Para hacernos una idea clara de estos movimientos, realicemos algunos cálculos:**

  a) El Talgo, durante 2 h, va a 120 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

  b) De 2 a $2\frac{1}{4}$, el Talgo disminuye su velocidad. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

c) El tren de mercancías aminora la marcha a las 3 h. ¿Qué distancia ha recorrido hasta ese momento?

d) ¿Qué distancia recorre el tren de mercancías durante la media hora en que va a baja velocidad?

e) ¿A qué distancia de la estación de salida está esta otra en la que para el Talgo?

f) Observa que en todos los cálculos que has realizado hasta ahora se han obtenido áreas bajo las gráficas, roja o negra. Señala los recintos cuyas áreas has calculado y asigna a cada uno su área correspondiente.

a) $120 \cdot 2 = 240$ km.

b) A 60 km/h durante $\frac{1}{4}$ de hora, recorre $\frac{60}{4} = 15$ km.

c) Ha ido a 80 km/h durante 3 horas, luego ha recorrido $80 \cdot 3 = 240$ km.

d) Va a 30 km/h durante $\frac{1}{2}$ hora, luego recorre $30 \cdot \frac{1}{2} = 15$ km.

e) La parada la hace a las 3 horas; en este momento lleva recorrida una distancia de:

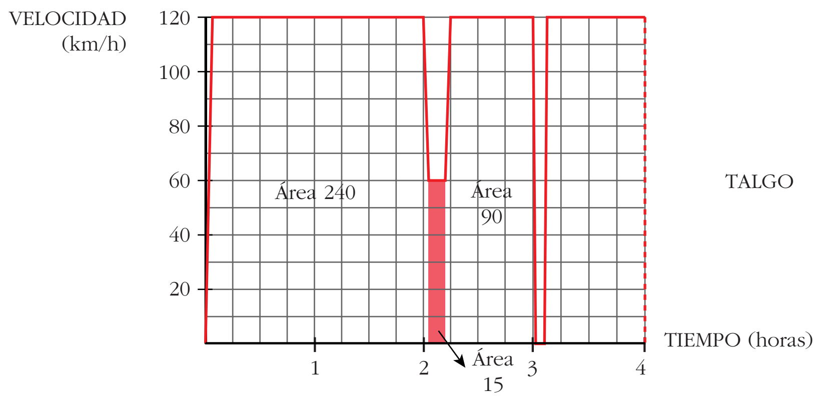
$120 \cdot 2 = 240$ km en las dos primeras horas

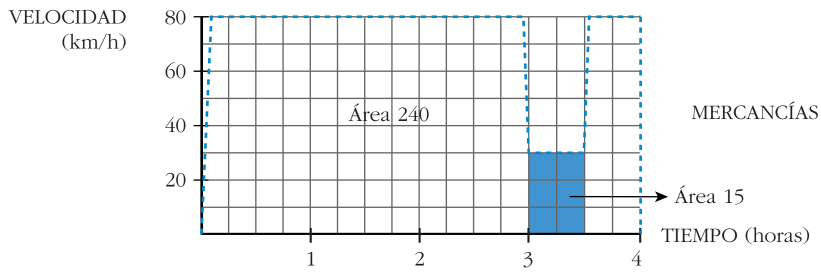
$60 \cdot \frac{1}{4} = 15$ km el siguiente cuarto de hora

$120 \cdot \frac{3}{4} = 90$ km los siguientes tres cuartos de hora

Total: $240 + 15 + 90 = 345$ km hasta llegar a la parada.

f)

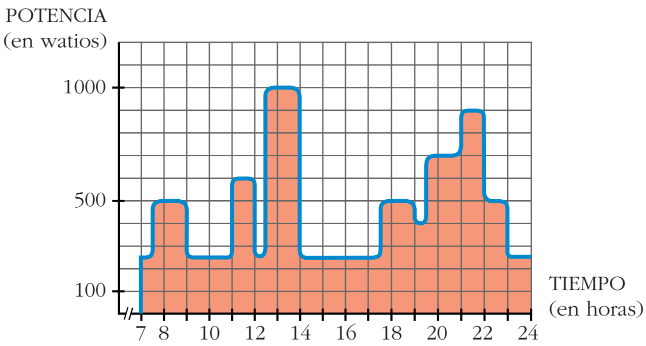




Página 207

2. **Consumo de energía eléctrica**

La gráfica nos da la potencia eléctrica que hay en funcionamiento en una vivienda, a cada instante, entre las 7 de la mañana y las 12 de la noche.



El área bajo la curva es la energía consumida: potencia × tiempo = energía.

Un cuadrito equivale a 0,1 kW · h

■ **¿Cuántos kW · h se han consumido, aproximadamente, en esas 17 horas?**

Hay 81,25 cuadritos, luego se han consumido: 0,1 · 81,25 = 8,125 kW · h

3. **¿Cuál es la función cuya derivada es…?**

La función cuya derivada es $2x$ es … x^2

La función cuya derivada es $\cos x$ es … $\operatorname{sen} x$

La función cuya derivada es $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ es … $\sqrt{x}$

Di cuál es la función cuya derivada es:

a) $3x^2$	**b)** x^2	**c)** $5x^2$	**d)** $4x^3$	**e)** x^3
f) $7x^3$	**g)** $3x^2 + 4x^3$	**h)** $5x^2 + 7x^3$	**i)** $-\operatorname{sen} x$	**j)** $\operatorname{sen} x$
k) $5 \operatorname{sen} x$	**l)** $2^x \cdot \ln 2$	**m)** 2^x	**n)** $5 \cdot 2^x$	

a) x^3	b) $\dfrac{x^3}{3}$	c) $\dfrac{5x^3}{3}$	d) x^4	e) $\dfrac{x^4}{4}$
f) $\dfrac{7x^4}{4}$	g) $x^3 + x^4$	h) $\dfrac{5x^3}{3} + \dfrac{7x^4}{4}$	i) $\cos x$	j) $-\cos x$
k) $-5 \cos x$	l) 2^x	m) $\dfrac{2^x}{\ln 2}$	n) $\dfrac{5 \cdot 2^x}{\ln 2}$	

Página 208

1. **Halla una primitiva de: a) x^4 b) $\sqrt[3]{x}$ c) $\dfrac{1}{x^4}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$**

a) $\displaystyle\int x^4 = \frac{x^5}{5}$

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x} = \int x^{1/3} = \frac{x^{4/3}}{4/3} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4} = \int x^{-4} = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3}$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2} = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$

2. **Busca una primitiva de:**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^4}}$ **c)** $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x^3}$

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \int x^{1/3 - 1/2} = \int x^{-1/6} = \frac{x^{5/6}}{5/6} = \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^4}} = \int x^{1/6} = \frac{x^{7/6}}{7/6} = \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}$

c) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x^3} = \int x^{1/3} \cdot x^{3/2} = \int x^{11/6} = \frac{x^{17/6}}{17/6} = \frac{6\sqrt[6]{x^{17}}}{17}$

Página 209

3. **Halla una primitiva de:**

a) $f(x) = 11x^5$ **b)** $f(x) = \sqrt[3]{5x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 3}{x^2}$

a) $\displaystyle\int 11x^5 = \frac{11x^6}{6} + k$

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{5x^2} = \int \sqrt[3]{5} \cdot x^{2/3} = \sqrt[3]{5} \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 3}{x^2} = \int x^2 - 3x + 7 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} =$

$\displaystyle= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x - 2\, ln\, |x| - \frac{3}{x} + k$

4. **Busca una primitiva de:**

a) $f(x) = 4\, sen\, x - 5\cos x$ **b)** $f(x) = 3\, e^{x-1} + 5 \cdot 2^{2x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{5x - 1}{\sqrt{5x}}$

a) $\displaystyle\int (4\, sen\, x - 5\cos x) = -4\cos x - 5\, sen\, x + k$

b) $\displaystyle\int (3e^{x-1} + 5 \cdot 2^{2x+2}) = 3e^{x-1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2^{2x+2}}{ln\, 2} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{5x - 1}{\sqrt{5x}} = \int \left(\frac{5x}{\sqrt{5x}} - \frac{1}{\sqrt{5x}}\right) = \int \left(\sqrt{5x} - \frac{1}{\sqrt{5x}}\right) = \frac{2\sqrt{5x^3}}{3} - \frac{2\sqrt{5x}}{5} + k$

Página 211

5. Halla las primitivas de estas funciones:

a) $f(x) = (x^3 - 5x + 3)^2 (3x^2 - 5)$ **b)** $f(x) = (5x + 1)^3$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x}$

e) $f(x) = \cos x \ \text{sen}^3\, x$

a) $\displaystyle\int (x^3 - 5x + 3)^2 (3x^2 - 5) = \frac{(x^3 - 5x + 3)^3}{3} + k$

b) $\displaystyle\int (5x + 1)^3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x + 1)^4}{4} + k = \frac{(5x + 1)^4}{20} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x} = \ln |x^3 - 3x| + k$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x} = \frac{1}{3} \ln |x^3 - 3x| + k$

e) $\displaystyle\int \cos x \ \text{sen}^3\, x = \frac{\text{sen}^4\, x}{4} + k$

6. Busca las primitivas de:

a) $f(x) = x\, 2^{x^2} \ln 2$ **b)** $f(x) = x\, 2^{x^2}$

c) $f(x) = 2^{3x - 5}$ **d)** $f(x) = \text{sen}\ 3x$

e) $f(x) = \text{sen}\,(x^3 - 4x^2)(3x^2 - 8x)$ **f)** $f(x) = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\ x}$

a) $\displaystyle\int x\, 2^{x^2} \ln 2 = \frac{1}{2} \cdot 2^{x^2} + k = \frac{2^{x^2}}{2} + k$

b) $\displaystyle\int x\, 2^{x^2} = \frac{1}{2 \ln 2} \cdot 2^{x^2} + k = \frac{2^{x^2}}{2 \ln 2} + k$

c) $\displaystyle\int 2^{3x - 5} = \frac{1}{3 \ln 2} \cdot 2^{3x - 5} + k = \frac{2^{3x - 5}}{3 \ln 2} + k$

d) $\displaystyle\int \text{sen}\ 3x = -\frac{1}{3} \cos 3x + k$

e) $\displaystyle\int \text{sen}\,(x^3 - 4x^2)(3x^2 - 8x) = -\cos(x^3 - 4x^2) + k$

f) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\text{sen}\ x} = \ln |\text{sen}\ x| + k$

Página 215

1. Halla e interpreta estas integrales:

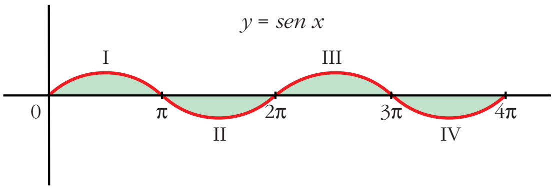
a) $\displaystyle\int_0^{4\pi} sen\ x$ **b)** $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)$

a) $G(x) = \displaystyle\int sen\ x = -cos\ x$

$G(4\pi) = -1; \quad G(0) = -1$

$$\int_0^{4\pi} sen\ x = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

Interpretación geométrica:



La parte positiva y la parte negativa son iguales; por eso da de resultado 0:

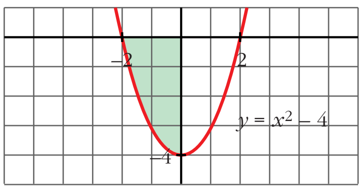
Área de I – Área de II + Área de III – Área de IV = 0

b) $G(x) = \displaystyle\int (x^2 - 4) = \frac{x^3}{3} - 4x$

$G(2) = -\dfrac{16}{3}; \quad G(-2) = \dfrac{16}{3}$

$$\int_{-2}^{2} (x^2 - 4) = -\frac{16}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{32}{3}$$

Interpretación geométrica:



Como queda por debajo del eje X, la integral es el área del recinto señalado con signo negativo, es decir:

$$–\text{Área del recinto} = -\frac{32}{3}$$

2. Halla la siguiente integral e interprétala geométricamente: $\displaystyle\int_0^2 e^x$

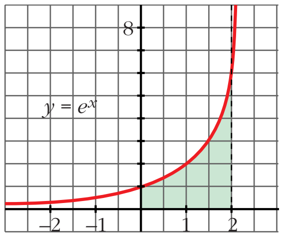
$G(x) = \displaystyle\int e^x = e^x$

$G(2) = e^2; \;\; G(0) = 1$

$$\int_0^2 e^x = e^2 - 1 \approx 6{,}39$$

Interpretación geométrica:

Área del recinto $= e^2 - 1 \approx 6{,}39$



Página 217

1. Halla el área comprendida entre la función $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 5$.

- Puntos de corte con el eje X:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \;\to\; x_1 = -2, \;\; x_2 = -1, \;\; x_3 = 1, \;\; x_4 = 2$$

Solo nos sirven $x = 1$, $x = 2$ (están entre 0 y 5).

- Hay tres recintos: I [0, 1]; II [1, 2]; III [2, 5]

- $G(x) = \int (x^2 - 1)(x^2 - 4) = \int (x^4 - 5x^2 + 4) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{5x^3}{3} + 4x$

- $G(0) = 0; \;\; G(1) = \dfrac{38}{15}; \;\; G(2) = \dfrac{16}{15}; \;\; G(5) = \dfrac{1310}{3}$

- Área del recinto I $= |G(1) - G(0)| = \dfrac{38}{15}$

Área del recinto II $= |G(2) - G(1)| = \left| -\dfrac{22}{15} \right| = \dfrac{22}{15}$

Área del recinto III $= |G(5) - G(2)| = \dfrac{2178}{5}$

Área total $= \dfrac{38}{15} + \dfrac{22}{15} + \dfrac{2178}{5} = \dfrac{2198}{5} = 439{,}6 \text{ u}^2$

2. Halla el área comprendida entre la función $y = x^3 - x^2 - 2x$ y el eje X.

- Puntos de corte con el eje X:

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \;\to\; x(x^2 - x - 2) = 0 \;\to\; x_1 = -1, \;\; x_2 = 0, \;\; x_3 = 2$$

- Hay dos recintos: I [–1, 0]; II [0, 2]

- $G(x) = \int (x^3 - x^2 - 2x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2$

- $G(-1) = -\frac{5}{12}$; $G(0) = 0$; $G(2) = -\frac{8}{3}$
- Área del recinto I $= |G(0) - G(-1)| = \frac{5}{12}$

  Área del recinto II $= |G(2) - G(0)| = \frac{8}{3}$

  Área total $= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \approx 3{,}08 \text{ u}^2$

Página 218

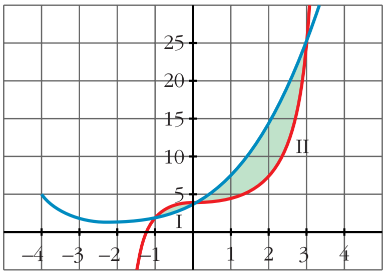
1. Halla el área encerrada entre las gráficas de las funciones siguientes:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - x^2 + 4, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4}$$

- $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 + 4 - x^2 - 3x - 4 = x^3 - 2x^2 - 3x$
- $x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \; x_2 = 0, \; x_3 = 3$
- Hay dos recintos: I $[-1, 0]$; II $[0, 3]$
- $G(x) = \int (x^3 - 2x^2 - 3x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$
- $G(-1) = -\frac{7}{12}$; $G(0) = 0$; $G(3) = -\frac{45}{4}$
- Recinto I: Área $[-1, 0] = |G(0) - G(-1)| = \frac{7}{12}$

  Recinto II: Área $[0, 3] = |G(3) - G(0)| = \frac{45}{4}$

  Área total: $\frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6} \approx 11{,}83 \text{ u}^2$



Página 225

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Halla una primitiva de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + 1$ **b)** $f(x) = 2x - \sqrt{3}$

c) $f(x) = \frac{x}{2} + x^2$ **d)** $f(x) = -8x^3 + 3x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ **f)** $f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{5x^4}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{3}$ **h)** $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

a) $\int (x+1) = \dfrac{x^2}{2} + x$

b) $\int (2x - \sqrt{3}\,) = x^2 - \sqrt{3}\,x$

c) $\int \left(\dfrac{x}{2} + x^2\right) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{3}$

d) $\int (-8x^3 + 3x^2) = -2x^4 + x^3$

e) $\int \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = \int (x^{-2} + x^{-3}) = \dfrac{x^{-1}}{-1} + \dfrac{x^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2}$

f) $\int \left(\sqrt{x} + \dfrac{3}{5x^4}\right) = \int \left(x^{1/2} + \dfrac{3}{5}x^{-4}\right) = \dfrac{x^{3/2}}{3/2} + \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{x^{-3}}{-3} = \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} - \dfrac{1}{5x^3}$

g) $\int \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{x}{3}\right) = \int \left(x^{-1/2} + \dfrac{1}{3}x\right) = \dfrac{x^{1/2}}{1/2} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2}{2} = 2\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{6}$

h) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \int x^2 \cdot x^{-1/3} = \int x^{5/3} = \dfrac{x^{8/3}}{8/3} = \dfrac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}$

2 Calcula:

a) $\int \sqrt{3x}$ **b)** $\int \sqrt[3]{5x^2}$ **c)** $\int \dfrac{x + x^2}{\sqrt{x}}$ **d)** $\int \dfrac{x^3 - 2}{x^2}$

e) $\int \dfrac{3}{x}$ **f)** $\int \dfrac{2}{x+1}$ **g)** $\int \dfrac{x-2}{x^2}$ **h)** $\int \dfrac{3-2x}{x}$

a) $\int \sqrt{3x} = \int \sqrt{3}\,x^{1/2} = \sqrt{3}\,\dfrac{x^{3/2}}{3/2} + k = \dfrac{2\sqrt{3}\,\sqrt{x^3}}{3} + k = \dfrac{2\sqrt{3x^3}}{3} + k$

b) $\int \sqrt[3]{5x^2} = \int \sqrt[3]{5}\,x^{2/3} = \sqrt[3]{5}\,\dfrac{x^{5/3}}{5/3} + k = \dfrac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$

c) $\int \dfrac{x + x^2}{\sqrt{x}} = \int (x^{1/2} + x^{3/2}) = \dfrac{x^{3/2}}{3/2} + \dfrac{x^{5/2}}{5/2} + k = \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} + \dfrac{2\sqrt{x^5}}{5} + k$

d) $\int \dfrac{x^3 - 2}{x^2} = \int (x - 2x^{-2}) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2x^{-1}}{-1} + k = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{x} + k$

e) $\int \dfrac{2}{x} = 2\,ln\,|x| + k$

f) $\displaystyle\int \frac{2}{x+1} = 2\ ln\ |x+1| + k$

g) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = ln\ |x| + \frac{2}{x} + k$

h) $\displaystyle\int \frac{3-2x}{x} = \int \left(\frac{3}{x} - 2\right) = 3\ ln\ |x| - 2x + k$

3 **Resuelve:**

a) $\displaystyle\int sen\ 3x$

b) $\displaystyle\int cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{cos^2 5x}$

d) $\displaystyle\int (1 + tg^2 3x)$

e) $\displaystyle\int \frac{cos\ x}{sen\ x}$

f) $\displaystyle\int \left(1 - sen\ \frac{x}{2}\right)$

g) $\displaystyle\int sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

h) $\displaystyle\int cos\ \frac{\pi}{2}\ x$

a) $\displaystyle\int sen\ 3x = -\frac{1}{3}\int -3\ sen\ 3x = -\frac{1}{3}\ cos\ 3x + k$

b) $\displaystyle\int cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + k$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{cos^2 5x} = \frac{1}{5}\int 5 \cdot \frac{1}{cos^2 5x} = \frac{1}{5}\ tg\ 5x + k$

d) $\displaystyle\int (1 + tg^2 3x) = \frac{1}{3}\int 3(1 + tg^2 3x) = \frac{1}{3}\ tg\ 3x + k$

e) $\displaystyle\int \frac{cos\ x}{sen\ x} = ln\ |sen\ x| + k$

f) $\displaystyle\int \left(1 - sen\ \frac{x}{2}\right) = x + 2\ cos\ \frac{x}{2} + k$

g) $\displaystyle\int sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k$

h) $\displaystyle\int cos\ \frac{\pi}{2}\ x = \frac{2}{\pi}\int \frac{\pi}{2}\ cos\ \frac{\pi}{2}\ x = \frac{2}{\pi}\ sen\ \frac{\pi}{2}\ x + k$

4 **Calcula:**

a) $\int e^{x+3}$ **b)** $\int e^{2x-1}$ **c)** $\int 2^{x-7}$ **d)** $\int 3^{x/2}$

a) $\int e^{x+3} = e^{x+3} + k$

b) $\int e^{2x-1} = \frac{1}{2}\int 2\,e^{2x-1} = \frac{1}{2}e^{2x-1} + k$

c) $\int 2^{x-7} = \frac{1}{\ln 2}\int \ln 2 \cdot 2^{x-7} = \frac{1}{\ln 2}\cdot 2^{x-7} + k = \frac{2^{x-7}}{\ln 2} + k$

d) $\int 3^{x/2} = 2\int \frac{1}{2}\,3^{x/2} = \frac{2\cdot 3^{x/2}}{\ln 3} + k$

5 **Calcula:**

a) $\int (x-3)^3$ **b)** $\int (2x+1)^5$ **c)** $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

d) $\int \sqrt{3x-5}$ **e)** $\int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}$ **f)** $\int \frac{3}{2x-1}$

g) $\int \frac{2x}{x^2+2}$ **h)** $\int \frac{x}{3x^2-4}$

a) $\int (x-3)^3 = \frac{(x-3)^4}{4} + k$

b) $\int (2x+1)^5 = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^6}{6} + k = \frac{(2x+1)^6}{12} + k$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}} = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = 2\sqrt{x+2} + k$

d) $\int \sqrt{3x-5} = \frac{1}{3}\int 3(3x-5)^{1/2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-5)^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{(3x-5)^3}}{9} + k$

e) $\int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}} = 2\int \frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{2}\right)^{1/3} = 2\cdot\frac{[(x+3)/2]^{4/3}}{4/3} + k = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{x+3}{2}\right)^4} + k$

f) $\int \frac{3}{2x-1} = \frac{1}{2}\cdot 3\int \frac{2}{2x-1} = \frac{3}{2}\ln|2x-1| + k$

g) $\int \frac{2x}{x^2+2} = \ln|x^2+2| + k$

h) $\int \frac{x}{3x^2-4} = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2-4} = \frac{1}{6}\ln|3x^2-4| + k$

6 **Calcula:**

a) $\int x\sqrt{5x^2+1}$ **b)** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-3}}$ **c)** $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}$

d) $\int x\,e^{x^2}$ **e)** $\int \frac{5x}{3x^2+2}$ **f)** $\int sen^2 x\ cos\,x$

g) $\int \frac{x^3}{x^4-4}$ **h)** $\int x\ sen\ x^2$

a) $\int x\sqrt{5x^2+1} = \frac{1}{10}\int 10x(5x^2+1)^{1/2} = \frac{1}{10}\cdot\frac{(5x^2+1)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{\sqrt{(5x^2+1)^3}}{15} + k$

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-3}} = \frac{2}{3}\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-3}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3-3} + k$

c) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3} = ln\,|x^2+x-3| + k$

d) $\int x\,e^{x^2} = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + k$

e) $\int \frac{5x}{3x^2+2} = \frac{5}{6}\int \frac{6x}{3x^2+2} = \frac{5}{6}\,ln\,|3x^2+2| + k$

f) $\int sen^2 x\ cos\,x = \frac{sen^3 x}{3} + k$

g) $\int \frac{x^3}{x^4-4} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-4} = \frac{1}{4}\,ln\,|x^4-4| + k$

h) $\int x\ sen\ x^2 = -\frac{1}{2}\int -2x\ sen\ x^2 = -\frac{1}{2}\ cos\ x^2 + k$

7 **Calcula:**

a) $\int 3e^{5x}$ **b)** $\int x^2\cdot 2^{-x^3+5}$ **c)** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}}$

d) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+2}}$ **e)** $\int \frac{\sqrt{x+5}}{x+5}$ **f)** $\int \frac{3x-2}{\sqrt{3x-2}}$

a) $\int 3\,e^{5x} = \frac{3}{5}\int 5\,e^{5x} = \frac{3}{5}\,e^{5x} + k$

b) $\int x^2\cdot 2^{-x^3+5} = -\frac{1}{3}\int -3x^2\cdot 2^{-x^3+5} = \frac{-2^{-x^3+5}}{3\,ln\,2} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}} = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}} = 2\, e^{\sqrt{x}} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+2}} = \sqrt{x^2-6x+2} + k$

e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+5}}{x+5} = \int \frac{1}{\sqrt{x+5}} = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x+5}} = 2\sqrt{x+5} + k$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{\sqrt{3x-2}} = \int \sqrt{3x-2} = \frac{1}{3}\int 3\,(3x-2)^{1/2} = \frac{1}{3}\,\frac{(3x-2)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{(3x-2)^3}}{9} + k$

8 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{x-1}$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^2+5x-7}{x+3}$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+1}{2x-1}$ **d)** $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-1}{x^2-1}$

☛ ***Divide y transforma la fracción así:*** $\dfrac{\textit{Dividendo}}{\textit{divisor}} = \textit{cociente} + \dfrac{\textit{resto}}{\textit{divisor}}$

a) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{x-1} = \int \left(x-2+\frac{2}{x-1}\right) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\,ln\,|x-1| + k$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x-7}{x+3} = \int \left(x+2-\frac{13}{x+3}\right) = \frac{x^2}{2} + 2x - 13\,ln\,|x+3| + k$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+1}{2x-1} = \int (x-1) = \frac{x^2}{2} - x + k$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-1}{x^2-1} = \int \left(1+\frac{3x}{x^2-1}\right) = x + \frac{3}{2}\,ln\,|x^2-1| + x$

9 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,sen\,\frac{1}{x}$ **b)** $\displaystyle\int sen\,x\,\cos x$ **c)** $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x}}$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+1}$ **e)** $\displaystyle\int (2x^2+1)^2$ **f)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x^2-2}}$

g) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-1}{x-2}$ **h)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}$ **i)** $\displaystyle\int \frac{2}{x}\,ln\,x$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x}\cos e^{-x}$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\, sen\, \frac{1}{x} = cos\, \frac{1}{x} + k$

b) $\displaystyle\int sen\, x\, cos\, x = \frac{sen^2\, x}{2} + k$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x}} = \int x^{3/4} = \frac{x^{7/4}}{7/4} + k = \frac{4\sqrt[4]{x^7}}{7} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \int \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x+1} + k$

e) $\displaystyle\int (2x^2 + 1)^2 = \int (4x^4 + 4x^2 + 1) = \frac{4x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + x + k$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x^2 - 2}} = \frac{1}{3}\int \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2}} = \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{3} + k$

g) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2} = \int \left(3x + 8 + \frac{15}{x - 2}\right) = \frac{3x^2}{2} + 8x + 15\, ln\, |x - 2| + k$

h) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^x} = ln\, |1 + e^x| + k$

i) $\displaystyle\int \frac{2}{x}\, ln\, x = ln^2\, x + k$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x}\, cos\, e^{-x} = -sen\, e^{-x} + k$

Página 226

10 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_2^5 (-3x^2)$ **b)** $\displaystyle\int_4^6 (2x - 1)$ **c)** $\displaystyle\int_{-2}^2 (x^3 + x)$

d) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{3x}$ **e)** $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}$ **f)** $\displaystyle\int_{-1}^3 e^{x-2}$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} (sen\, x - cos\, x)$ **h)** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} sen\, 2x$

a) $\displaystyle G(x) = \int (-3x^2) = -x^3$

$G(5) = -125;\quad G(2) = -8$

$$\int_2^5 (-3x^2) = G(5) - G(2) = -125 - (-8) = -117$$

b) $G(x) = \int (2x - 1) = x^2 - x$

$G(6) = 30; \quad G(4) = 12$

$$\int_4^6 (2x - 1) = G(6) - G(4) = 30 - 12 = 18$$

c) $G(x) = \int (x^3 + x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$

$G(2) = G(-2) = 6$

$$\int_{-2}^2 (x^3 + x) = G(2) - G(-2) = 0$$

d) $G(x) = \int \sqrt{3x} = \int \sqrt{3}\, x^{1/2} = \frac{\sqrt{3}\, x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3}$

$G(4) = \frac{16\sqrt{3}}{3}; \quad G(1) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\int_1^4 \sqrt{3x} = G(4) - G(1) = \frac{16\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

e) $G(x) = \int \frac{1}{x} = ln\ |x|$

$G(e) = 1; \quad G(1) = 0$

$$\int_1^e \frac{1}{x} = G(e) - G(1) = 1$$

f) $G(x) = \int e^{x-2} = e^{x-2}$

$G(3) = e; \quad G(-1) = e^{-3}$

$$\int_{-1}^3 e^{x-2} = G(3) - G(-1) = e - e^{-3} = e - \frac{1}{e^3} = \frac{e^4 - 1}{e^3}$$

g) $G(x) = \int (sen\ x - cos\ x) = -cos\ x - sen\ x$

$G(\pi) = 1; \quad G(0) = -1$

$$\int_0^\pi (sen\ x - cos\ x) = G(\pi) - G(0) = 1 - (-1) = 2$$

h) $G(x) = \int sen\ 2x = -\frac{1}{2}\ cos\ 2x$

$G(\pi) = -\frac{1}{2}; \quad G(-\pi) = -\frac{1}{2}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen\ 2x = G(\pi) - G(-\pi) = 0$$

11 **S** **Halla, en cada caso, el área limitada por:**

a) $f(x) = x^2 - 4$, **el eje** X **y las rectas** $x = 0$ **y** $x = 2$.

b) $f(x) = 2x - x^2$, **el eje** X **y las rectas** $x = -1$ **y** $x = 1$.

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ **y el eje** X.

d) $f(x) = 1 - x^2$, **el eje** X **y las rectas** $x = -2$ **y** $x = 2$.

e) $f(x) = e^x$, **el eje** X **y las rectas** $x = -1$ **y** $x = 3$.

f) $f(x) = x^2 + 1$, **el eje** X **y las rectas** $x = -1$ **y** $x = 3$.

a) • Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2, \ x_2 = 2$

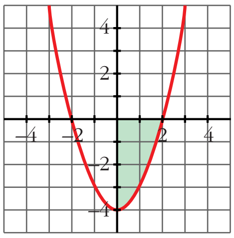
Solo nos sirve $x_2 = 2$.

• Hay un recinto: [0, 2]

• $G(x) = \int (x^2 - 4) = \frac{x^3}{3} - 4x$

• $G(2) = -\frac{16}{3}; \quad G(0) = 0$

• Área $= |G(2) - G(0)| = \frac{16}{3}$ u²



b) • Puntos de corte con el eje X: $2x^2 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 2$

• Hay dos recintos: I [–1, 0]; II [0, 1]

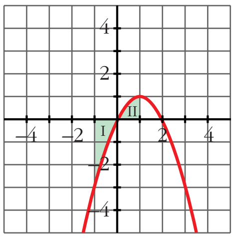
• $G(x) = \int (2x - x^2) = x^2 - \frac{x^3}{3}$

• $G(-1) = \frac{4}{3}; \quad G(0) = 0; \quad G(1) = \frac{2}{3}$

• Área del recinto I $= |G(0) - G(-1)| = \frac{4}{3}$

Área del recinto II $= |G(1) - G(0)| = \frac{2}{3}$

Área total $= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$ u²



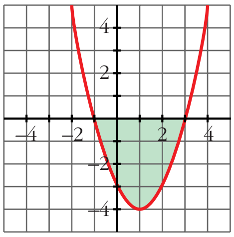
c) • Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3$

• Hay un recinto: $[-1, 3]$

• $G(x) = \int (x^2 - 2x - 3) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$

• $G(-1) = \dfrac{5}{3}$; $G(3) = -9$

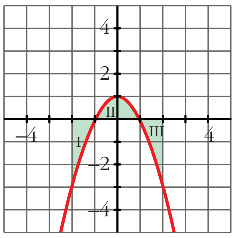
• Área $= |G(3) - G(-1)| = \left|-9 - \dfrac{5}{3}\right| = \dfrac{32}{3}$ u^2



d) • Puntos de corte con el eje X:

$1 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

• Hay tres recintos: I $[-2, -1]$; II $[-1, 1]$; III $[1, 2]$



• $G(x) = \int (1 - x^2) = x - \dfrac{x^3}{3}$

• $G(-2) = \dfrac{2}{3}$; $G(-1) = -\dfrac{2}{3}$; $G(1) = \dfrac{2}{3}$; $G(2) = -\dfrac{2}{3}$

• Área del recinto I $= |G(-1) - G(-2)| = \left|-\dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$

Área del recinto II $= |G(1) - G(-1)| = \left|\dfrac{2}{3} - \left(-\dfrac{2}{3}\right)\right| = \dfrac{4}{3}$

Área del recinto III $= |G(2) - G(1)| = \dfrac{4}{3}$

Área total $= 3 \cdot \dfrac{4}{3} = 4$ u^2

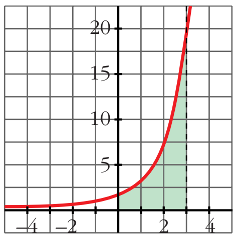
e) • No corta al eje X.

• $G(x) = \int e^x = e^x$

• $G(-1) = e^{-1}$; $G(3) = e^3$

• Área $= |G(3) - G(-1)| = e^3 - e^{-1} =$

$= e^3 - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e^4 - 1}{e} \approx 19{,}7$ u^2

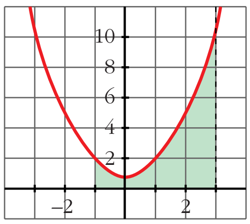


f) • No corta al eje X.

• $G(x) = \int (x^2 + 1) = \dfrac{x^3}{3} + x$

• $G(-1) = -\dfrac{4}{3}$; $G(3) = 12$

• Área $= |G(3) - G(-1)| = \dfrac{40}{3}$ u^2



12 **Halla las integrales de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:**

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$ **en** $[0, 2]$

b) $f(x) = 2 \cos x$ **en** $[0, \pi/2]$

c) $f(x) = (x + 1)(x^2 - 2)$ **en** $[-1, 2]$

d) $f(x) = sen \dfrac{x}{4}$ **en** $[0, \pi]$

a) • $G(x) = \int (3x^2 - 6x) = x^3 - 3x^2$

• $G(0) = 0; \quad G(2) = -4$

• $\int_0^2 (3x^2 - 6x) = G(2) - G(0) = -4$

b) • $G(x) = \int 2 \cos x = 2 \, sen \, x$

• $G(0) = 0; \quad G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$

• $\int_0^{\pi/2} 2 \cos x = G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - G(0) = 2$

c) • $G(x) = \int (x + 1)(x^2 - 2) = \int (x^3 + x^2 - 2x - 2) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 2x$

• $G(-1) = \dfrac{11}{12}; \quad G(2) = -\dfrac{4}{3}$

• $\int_{-1}^2 (x + 1)(x^2 - 2) = G(2) - G(-1) = -\dfrac{4}{3} - \dfrac{11}{12} = -\dfrac{9}{4}$

d) • $G(x) = \int sen \dfrac{x}{4} = -4 \cos \dfrac{x}{4}$

• $G(0) = -4; \quad G(\pi) = -\dfrac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$

• $\int_0^{\pi} sen \dfrac{x}{4} = G(\pi) - G(0) = -2\sqrt{2} + 4$

PARA RESOLVER

13 **S** **Calcula el área comprendida entre las curvas:**

a) $y = x^2; \; y = x$

b) $y = x^2; \; y = 1$

c) $y = x^2; \; y = x^3$

d) $y = x^2; \; y = -x^2 + 2x$

e) $y = 2x^2 + 5x - 3; \; y = 3x + 1$

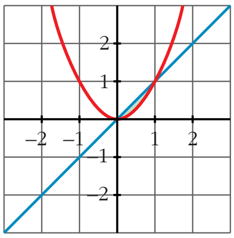
f) $y = 4 - x^2; \; y = 8 - 2x^2; \; x = -2; \; x = 2$

a) • $x^2 - x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\;\; x_2 = 1$

• $G(x) = \displaystyle\int (x^2 - x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$

• $G(0) = 0;\;\; G(1) = -\dfrac{1}{6}$

• Área $= |G(1) - G(0)| = \dfrac{1}{6}$ u^2

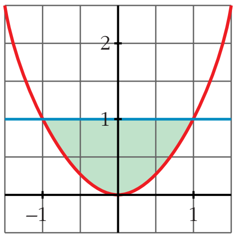


b) • $x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -1,\;\; x_2 = 1$

• $G(x) = \displaystyle\int (x^2 - 1) = \frac{x^3}{3} - x$

• $G(-1) = \dfrac{2}{3};\;\; G(1) = -\dfrac{2}{3}$

• Área $= |G(1) - G(-1)| = \dfrac{4}{3}$ u^2

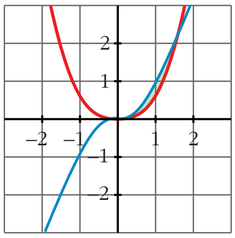


c) • $x^2 - x^3 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\;\; x_2 = 1$

• $G(x) = \displaystyle\int (x^2 - x^3) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

• $G(0) = 0;\;\; G(1) = \dfrac{1}{12}$

• Área $= |G(1) - G(0)| = \dfrac{1}{12}$ u^2

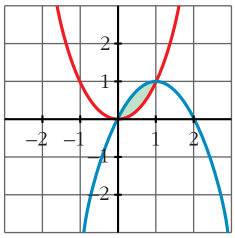


d) • $x^2 - (-x^2 + 2x) = 2x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\;\; x_2 = 1$

• $G(x) = \displaystyle\int (2x^2 - 2x) = \frac{2x^3}{3} - x^2$

• $G(0) = 0;\;\; G(1) = -\dfrac{1}{3}$

• Área $= |G(1) - G(0)| = \dfrac{1}{3}$ u^2

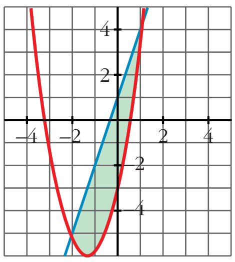


e) • $2x^2 + 5x - 3 - (3x + 1) = 2x^2 + 2x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -2,\;\; x_2 = 1$

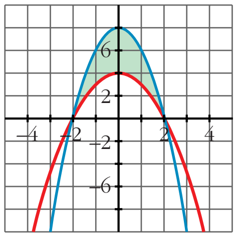
• $G(x) = \displaystyle\int (2x^2 + 2x - 4) = \frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x$

• $G(-2) = \dfrac{20}{3};\;\; G(1) = -\dfrac{7}{3}$

• Área $= |G(1) - G(2)| = \left|-\dfrac{7}{3} - \dfrac{20}{3}\right| = \dfrac{27}{3} = 9$ u^2



f) • $4 - x^2 - (8 - 2x^2) = x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2, \; x_2 = 2$



• $G(x) = \displaystyle\int (x^2 - 4) = \frac{x^3}{3} - 4x$

• $G(-2) = \dfrac{16}{3}; \;\; G(2) = -\dfrac{16}{3}$

• Área $= |G(2) - G(-2)| = \dfrac{32}{3}$ u^2

14 **S** **Calcula el área de los recintos limitados por:**

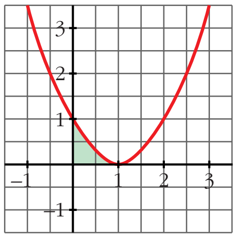
a) La función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y los ejes de coordenadas.

b) La curva $y = x^3$, la recta $x = 2$ y el eje X.

c) La función $y = sen\ x$, el eje de abscisas y las rectas $x = \dfrac{\pi}{4}$ y $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

d) La función $y = cos\ x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = \pi$.

a) • $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

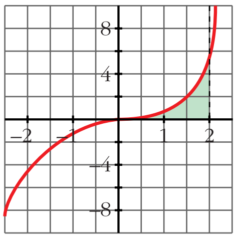


• $G(x) = \displaystyle\int (x - 1)^2 = \frac{(x - 1)^3}{3}$

• $G(0) = -\dfrac{1}{3}; \;\; G(1) = 0$

• Área $= |G(1) - G(0)| = \dfrac{1}{3}$ u^2

b) • $x^3 = 0 \rightarrow x = 0$



• $G(x) = \displaystyle\int x^3 = \frac{x^4}{4}$

• $G(0) = 0; \;\; G(2) = 4$

• Área $= |G(2) - G(0)| = 4$ u^2

c) • $sen\ x = 0 \rightarrow x = 0 \;\left(\text{entre } -\dfrac{\pi}{4} \text{ y } \dfrac{\pi}{4}\right)$

• Hay dos recintos: I $\left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right]$; II $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

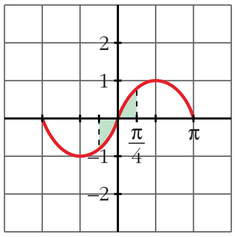
• $G(x) = \displaystyle\int sen\ x = -cos\ x$

• $G\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = G\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \;\; G(0) = -1$

- Área recinto I $= \left| G(0) - G\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = 0{,}29$

  Área recinto II $= \left| G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0) \right| = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}29$

  Área total $= 2 \cdot 0{,}29 \approx 0{,}58 \text{ u}^2$

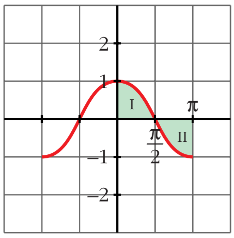


d) • $\cos x = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{\pi}{4}$ (entre 0 y π)

- Hay dos recintos: I $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; II $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
- $G(x) = \int \cos x = \operatorname{sen} x$
- $G(0) = 0$; $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $G(\pi) = 0$
- Área recinto I $= \left| G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0) \right| = 1$

  Área recinto II $= |G(\pi) - G(0)| = 1$

  Área total $= 1 + 1 = 2 \text{ u}^2$



15 **S** **Calcula el área comprendida entre las curvas:**

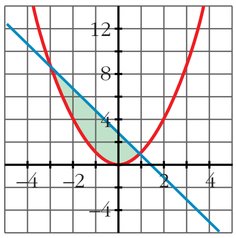
a) $y = x^2$ **e** $y = 3 - 2x$ **b)** $y = 4 - x^2$ **e** $y = 3x^2$

c) $y = x$ **e** $y = x^2 - 2$ **d)** $y = 4 - x^2$ **e** $y = x^2 - 4$

e) $y = (x + 2)^2 (x - 3)$ **y el eje de abscisas.**

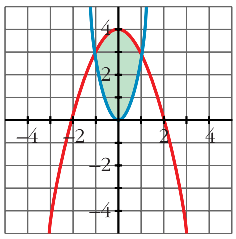
a) $x^2 - (3 - 2x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -3,\; x_2 = 1$

- $G(x) = \int (x^2 + 2x - 3) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$
- $G(-3) = 9$; $G(1) = -\frac{5}{3}$
- Área $= |G(1) - G(-3)| = \frac{32}{3} \text{ u}^2$

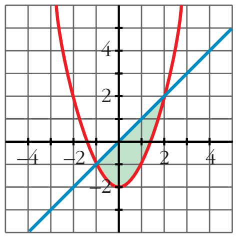


b) $4 - x^2 - 3x^2 = 4 - 4x^2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = 1$

- $G(x) = \int (4 - 4x^2) = 4x - \frac{4x^3}{3}$
- $G(-1) = -\frac{8}{3}$; $G(1) = \frac{8}{3}$
- Área $= |G(1) - G(-1)| = \frac{16}{3} \text{ u}^2$

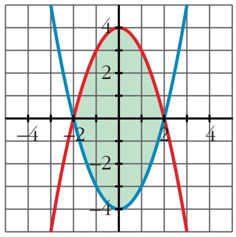


c) $x - (x^2 - 2) = x - x^2 + 2 = -x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$



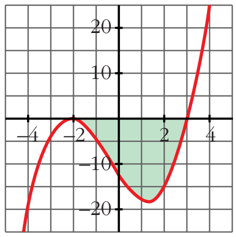
- $G(x) = \int (-x^2 + x + 2) = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x$
- $G(-1) = -\dfrac{7}{6};\ G(2) = \dfrac{10}{3}$
- Área $= |G(2) - G(-1)| = \dfrac{9}{2}\ u^2$

d) $4 - x^2 - (x^2 - 4) = -2x^2 + 8 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$



- $G(x) = \int (-2x^2 + 8) = -\dfrac{2x^3}{3} + 8x$
- $G(-2) = -\dfrac{32}{3};\ G(2) = \dfrac{32}{3}$
- Área $= |G(2) - G(-2)| = \dfrac{64}{3}\ u^2$

e) $(x + 2)^2 (x - 3) = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 3$

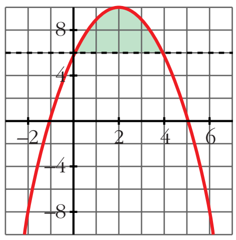


- $G(x) = \int (x + 2)^2 (x - 3) = \int (x^3 + x^2 - 8x - 12) =$

  $= \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 - 12x$
- $G(-2) = \dfrac{28}{3};\ G(3) = -\dfrac{171}{4}$
- Área $= |G(3) - G(-2)| = \dfrac{625}{12} \approx 52{,}1\ u^2$

16 S **Halla el área comprendida entre la curva $y = -x^2 + 4x + 5$ y la recta $y = 5$.**

$-x^2 + 4x + 5 - 5 = -x^2 + 4x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4$



- $G(x) = \int (-x^2 + 4x) = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2$
- $G(0) = 0;\ G(4) = \dfrac{32}{3}$
- Área $= |G(4) - G(0)| = \dfrac{32}{3}\ u^2$

17 S **Calcula el área limitada por las siguientes curvas:**

a) $y = x^3 + x^2;\ y = x^3 + 1;\ x = -1;\ x = 1$

b) $y = x^2;\ y = 1 - x^2;\ y = 2$

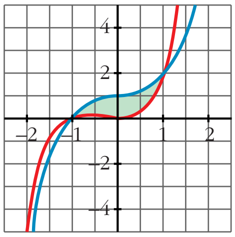
c) $y = x(x - 1)(x - 2);\ y = 0$

d) $y = x^2 - 2x;\ y = x$

e) $y = x^3 - 2x;\ y = -x^2$

f) $y = 2x - x^3;\ y = x^2$

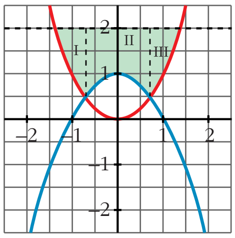
a) $x^3 + x^2 - (x^3 + 1) = x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$



- $G(x) = \int (x^2 - 1) = \frac{x^3}{3} - x$
- $G(-1) = \frac{2}{3};\ G(1) = -\frac{2}{3}$
- Área $= |G(1) - G(-1)| = \frac{4}{3}$ u^2

b) $x^2 = 1 - x^2 \rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2 = 2 \rightarrow x_3 = -\sqrt{2},\ x_4 = \sqrt{2}$



- Tenemos tres recintos:

  $\text{I}\left[-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right];\ \text{II}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right];\ \text{III}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$

- Para el I y el III hay que considerar:

  $G_1(x) = \int (2 - x^2) = x - \frac{x^3}{3}$

  $G_1\left(-\sqrt{2}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{3};\ G_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{11\sqrt{2}}{12};\ G_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{11\sqrt{2}}{12};\ G_1\left(\sqrt{2}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

  Área del recinto I $= \left|G_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_1\left(-\sqrt{2}\right)\right| = \frac{5\sqrt{2}}{12}$

  Área del recinto III $= \left|G_1\left(\sqrt{2}\right) - G_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \frac{5\sqrt{2}}{12}$

- Para el II hay que considerar:

  $G_2(x) = \int (2 - 1 + x^2) = \int (1 + x^2) = x + \frac{x^3}{3}$

  $G_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{12};\ G_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{12}$

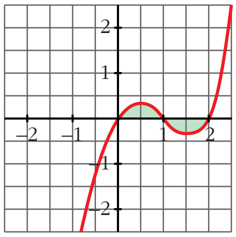
  Área del recinto II $= \left|G_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \frac{7\sqrt{2}}{6}$

- Área total $= \frac{5\sqrt{2}}{12} + \frac{7\sqrt{2}}{6} + \frac{5\sqrt{2}}{12} = \frac{12\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2}$ u^2

c) $x(x - 1)(x - 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$

- Hay dos recintos: I [0, 1]; II [1, 2]
- $G(x) = \int x(x - 1)(x - 2) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$

• $G(0) = 0$; $G(1) = \frac{1}{4}$; $G(2) = 0$

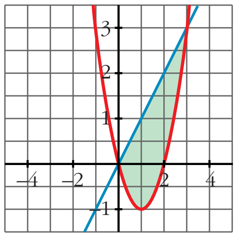


• Área del recinto I $= |G(1) - G(0)| = \frac{1}{4}$

Área del recinto II $= |G(2) - G(1)| = \frac{1}{4}$

Área total $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ u^2

d) $x^2 - 2x - x = x^2 - 3x = 0 \rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = 3$



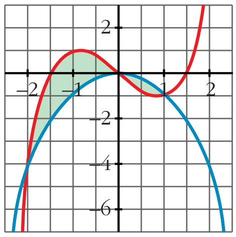
• $G(x) = \int (x^2 - 3x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$

• $G(0) = 0$; $G(3) = -\frac{9}{2}$

• Área $= |G(3) - G(0)| = \frac{9}{2}$ u^2

e) $x^3 - 2x - (-x^2) = x^3 + x^2 - 2x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = -2, \; x_2 = 0, \; x_3 = 1$



• Hay dos recintos: I $[-2, 0]$; II $[0, 1]$

• $G(x) = \int (x^3 + x^2 - 2x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$

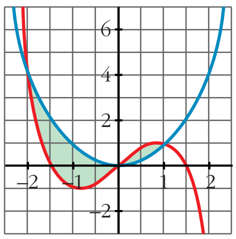
• $G(-2) = -\frac{8}{3}$; $G(0) = 0$; $G(1) = -\frac{5}{12}$

• Área del recinto I $= |G(0) - G(-2)| = \frac{8}{3}$

Área del recinto II $= |G(1) - G(0)| = \frac{5}{12}$

Área total $= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$ u^2

f) Por simetría respecto al anterior, el área es la misma:



Área total $= \frac{37}{12}$ u^2

18 Un depósito se vacía de forma variable según la función $v(t) = 5 - 0{,}1t$ (t en min, v en l/min). Calcula lo que se ha vaciado el depósito entre los minutos 100 y 200.

$$G(t) = \int (5 - 0{,}1t) = 5t - \frac{0{,}1t^2}{2} = 5t - 0{,}05t^2$$

$G(200) = -1\,000; \;\; G(100) = 0$

$\text{Área} = |G(200) - G(100)| = 1\,000$

Se han vaciado 1 000 litros entre los minutos 100 y 200.

19 S **Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según un ritmo dado por la siguiente función: $m = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$ siendo m la cantidad de material en kg y t la hora del día. ¿Cuánto material arroja cada día?**

Consideramos t entre 0 y 24 horas:

$$\int_0^{24} (0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1) = \left[\frac{0{,}01t^4}{4} - \frac{0{,}2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \right]_0^{24} =$$

$$= 219{,}84 - 0 = 219{,}84 \text{ kg}$$

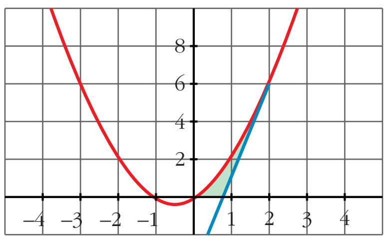
20 S **Calcula el área limitada por la gráfica de $y = x + x^2$, la tangente a esa curva en $x = 2$ y el eje de abscisas.**

- Recta tangente en $x = 2$:

$$y' = 1 + 2x \;\rightarrow\; m = y'(2) = 5; \;\; y(2) = 6$$

Recta $\rightarrow y = 6 + 5(x - 2) = 5x - 4$

- Hacemos las gráficas para entender mejor la situación:



- Puntos de corte de $y = x + x^2$ con el eje X:

$$x + x^2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -1, \;\; x_2 = 0$$

- Punto de corte de $y = 5x - 4$ con el eje X:

$$5x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4}{5}$$

- Área bajo $y = x + x^2$ entre 0 y 2:

$$G_1(x) = \int (x + x^2) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$G_1(2) = \frac{14}{3}$; $G_1(0) = 0$

Área $= |G_1(2) - G_1(0)| = \frac{14}{3}$ u^2

- Área bajo $y = 5x - 4$ entre $\frac{4}{5}$ y 2:

$G_2(x) = \int (5x - 4) = \frac{5x^2}{2} - 4x$

$G_2\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{5}$; $G_2(2) = 2$

Área $= \left|G_2(2) - G_2\left(\frac{4}{5}\right)\right| = 2 + \frac{8}{5} = \frac{18}{5}$ u^2

- El área buscada es: $\frac{14}{3} - \frac{18}{5} = \frac{16}{15}$ u^2

Página 227

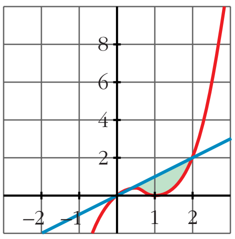
21 **Dada la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$, halla la ecuación de su tangente en el origen y calcula el área de la región que queda encerrada entre la curva y la tangente.**

- Tangente en el origen:

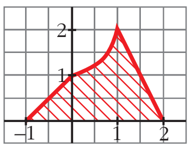
$$y' = 3x^2 - 4x + 1; \quad m = y'(0) = 1; \quad y(0) = 0$$

Recta $\rightarrow y = x$

- $x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 2$
- $G(x) = \int (x^3 - 2x^2) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$
- $G(0) = 0$; $G(2) = -\frac{4}{3}$
- Área $= |G(2) - G(0)| = \frac{4}{3}$ u^2



22 **Halla el área de la figura sabiendo que el lado curvo corresponde a la función $y = x^2 + 1$.**



- Entre –1 y 0 tenemos un triángulo de base 1 y altura 1:

$$\text{Área} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$

- Entre 1 y 2 tenemos un triángulo de base 1 y altura 2:

$$\text{Área} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \text{ u}^2$$

- Entre 0 y 1:

$$G(x) = \int (x^2 + 1) = \frac{x^3}{3} + x$$

$$G(0) = 0; \quad G(1) = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área} = |G(1) - G(0)| = \frac{4}{3}\ \text{u}^2$$

- El área total será: $\frac{1}{2} + 1 + \frac{4}{3} = \frac{17}{6}\ \text{u}^2$

23 **Dada la función $f(x) = 4 - x^2$, escribe las ecuaciones de las tangentes a f en los puntos de corte con el eje de abscisas. Halla el área comprendida entre las rectas tangentes y la curva.**

- Puntos de corte con el eje X:

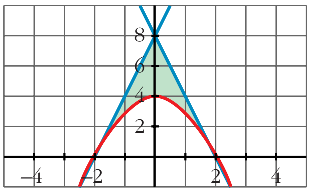
$$4 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2 \rightarrow \text{Puntos } (-2, 0) \text{ y } (2, 0)$$

- $f'(x) = -2x;\ f'(-2) = 4;\ f'(2) = -4$

- Recta tangente en $x = -2 \rightarrow y = 4(x + 2) = 4x + 8$

  Recta tangente en $x = 2 \rightarrow y = -4(x - 2) = -4x + 8$

- Hacemos una gráfica para entenderlo mejor:



- Área del triángulo de vértices (–2, 0), (0, 8) y (2, 0):

$$\text{Área} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16\ \text{u}^2$$

- Área entre $y = 4 - x^2$ y el eje X:

$$G(x) = \int (4 - x^2) = 4x - \frac{x^3}{3}$$

$$G(-2) = -\frac{16}{3}; \quad G(2) = \frac{16}{3}$$

$$\text{Área} = |G(2) - G(-2)| = \frac{32}{3}\ \text{u}^2$$

- El área total será la diferencia: $16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3}\ \text{u}^2$

24 **Dada $f(x) = x + 1$, halla:**

a) $\int_0^x f$ **b)** $\int_1^x f$ **c)** $\int_{-1}^x f$ **d)** $\int_1^3 f$

$$G(x) = \int (x + 1) = \frac{x^2}{2} + x$$

$$G(0) = 0;\ \ G(1) = \frac{3}{2};\ \ G(-1) = -\frac{1}{2};\ \ G(3) = \frac{15}{2}$$

a) $\int_0^x f = G(x) - G(0) = \frac{x^2}{2} + x$

b) $\int_1^x f = G(x) - G(1) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$

c) $\int_{-1}^x f = G(x) - G(-1) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$

d) $\int_1^3 f = G(3) - G(1) = \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$

25 **a) Halla el área limitada por $y = |2x - 4|$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.**

b) Calcula $\int_{-2}^3 |2x - 4|$.

a) Definimos la función por intervalos para hacernos una idea de su forma:

$$y = |2x - 4| = \begin{cases} -2x + 4, & x \le 2 \\ 2x - 4, & x > 2 \end{cases}$$

El área buscada será:

$$\int_0^5 y = \int_0^2 -2x + 4 + \int_2^5 2x - 4 = [-x^2 + 4x]_0^2 + [x^2 - 4x]_2^5 =$$

$$= (4 - 0) + (5 + 4) = 4 + 9 = 13 \text{ u}^2$$

b) $\int_{-2}^3 |2x - 4| = \int_{-2}^2 -2x + 4 + \int_2^3 2x - 4 = [-x^2 + 4x]_{-2}^2 + [x^2 - 4x]_2^3 =$

$$= (4 + 12) + (-3 + 4) = 16 + 1 = 17 \text{ u}^2$$

26 **Calcula: a) $\int_0^2 f(x)$ y b) $\int_{-1}^3 g(x)$, siendo:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x) = \int_0^1 x^2 + \int_1^2 (2 - x)$

$$G_1(x) = \int x^2 = \frac{x^3}{3} \;\rightarrow\; G_1(1) - G_1(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$G_2(x) = \int (2 - x) = 2x - \frac{x^2}{2} \;\rightarrow\; G_2(2) - G_2(1) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Así: $\displaystyle\int_0^2 f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^3 g(x) = \int_{-1}^1 2x + \int_1^3 (x^2 + 1)$

$$G_1(x) = \int 2x = x^2 \;\rightarrow\; G_1(1) - G_1(-1) = 1 - 1 = 0$$

$$G_2(x) = \int (x^2 + 1) = \frac{x^3}{3} + x \;\rightarrow\; G_2(3) - G_2(1) = 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$$

Así: $\displaystyle\int_{-1}^3 g(x) = \frac{32}{3}$

27 S **Dada la función $f(x)$, halla el área limitada por $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < \dfrac{-1}{2} \\ -x^2 + 3x & \dfrac{-1}{2} \le x \le 3 \\ |x + 3| & x > 3 \end{cases}$$

Para x comprendida entre 0 y 3, tenemos que:

$$f(x) = -x^2 + 3x$$

Hallamos los puntos de corte con el eje OX:

$$-x^2 + 3x = 0 \;\rightarrow\; x(-x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Por tanto, el área pedida es:

$$\text{Área} = \int_0^3 (-x^2 + 3x) = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ u}^2$$

28 **Halla una función f de la cual sabemos que:**

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 5 \quad \text{y que} \quad f(1) = 0$$

$G(x) = \int (3x^2 - 2x + 5) = x^3 - x^2 + 5x + k$ son las primitivas de la función dada.

Entre todas ellas, nos interesa la que cumple que $G(1) = 0$, es decir:

$$G(1) = 5 + k = 0 \Rightarrow k = -5$$

Así: $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 5$

29 **Halla la función primitiva de la función $y = 3x^2 - x^3$ que pase por el punto (2, 4).**

$G(x) = \int (3x^2 - x^3) = x^3 - \dfrac{x^4}{4} + k$ son las primitivas de la función dada.

Buscamos k para que pase por (2, 4):

$$G(2) = 4 + k = 4 \Rightarrow k = 0$$

La función que buscamos es:

$$f(x) = x^3 - \frac{x^4}{4}$$

30 **Halla la función que tome el valor 2 en $x = 1$ y cuya derivada es:**

$$f'(x) = 3x^2 + 6$$

$G(x) = \int (3x^2 + 6) = x^3 + 6x + k$ son las primitivas de la función dada.

Buscamos k para que $G(1) = 2$:

$$G(1) = 7 + k = 2 \Rightarrow k = -5$$

Por tanto: $f(x) = x^3 + 6x - 5$

31 **Halla la primitiva de $f(x) = 1 - x - x^2$ que corte al eje de abscisas en $x = 3$.**

$G(x) = \int (1 - x - x^2) = x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + k$ son las primitivas de la función dada.

Buscamos k para que $G(3) = 0$:

$$G(3) = -\frac{21}{2} + k \Rightarrow k = \frac{21}{2}$$

La función que buscamos es:

$$y = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{21}{2}$$

CUESTIONES TEÓRICAS

32 **Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de f, ¿se verifica necesariamente que $F(x) = k + G(x)$? Justifica la respuesta.**

Sí. Justificación:

$$\int f = F(x) + c_1 \qquad \int f = G(x) + c_2$$

Restando:

$$0 = F(x) - G(x) + (c_1 - c_2) \Rightarrow F(x) = k + G(x)$$

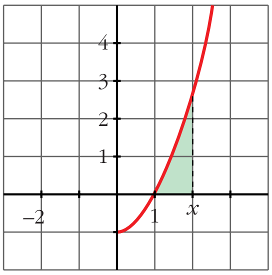
33 **Siendo $F(x) = \int_1^x f = 3x^2 - 5x$, halla la función f. Calcula $F(0)$ y $F(2)$.**

$f(x) = F'(x) = 6x - 5$

$F(0) = 0;\ \ F(2) = 2$

34 **Calcula el área bajo la curva $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo variable $[1, x]$. Halla el área para $x = 4$.**

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ \ x_2 = 1$



$\text{Área} = \int_1^x (t^2 - 1)$

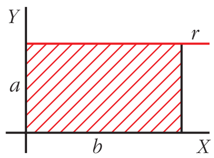
$G(t) = \int (t^2 - 1) = \dfrac{t^3}{3} - t$

$G(1) = -\dfrac{2}{3}$

$\text{Área } [1, x] = |G(x) - G(1)| = \dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{2}{3}$

Cuando $x = 4$, queda: $\text{Área } [1, 4] = 18 \text{ u}^2$

35 **Demuestra, utilizando integrales, que el área del rectángulo es $A = b \cdot a$.**



☛ ***Halla la ecuación de la recta r y calcula el área limitada por r y el eje OX entre $x = 0$ y $x = b$.***

La ecuación de r es $y = a$. El área es:

$$\text{Área} = \int_0^b a$$

$G(x) = \int a = a\,x$

$G(b) = a\,b;\ \ G(0) = 0$

$\text{Área} = G(b) - G(0) = a\,b$

36 S **Dada la función $f(x) = a\,e^{x/3} + \dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$:**

a) Calcula $\int_1^2 f(x)$ en función de a.

b) Se sabe que F es una primitiva de f. Calcula a si $F(1) = 0$ y $F(2) = 1/2$.

a) $\displaystyle\int_1^2 f(x) = \int_1^2 \left(a e^{x/3} + \frac{1}{x^2}\right) = \left[3a e^{x/3} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(3a e^{2/3} - \frac{1}{2}\right) - (3a e^{1/3} - 1) =$

$\displaystyle = 3a(e^{2/3} - e^{1/3}) + \frac{1}{2}$

b) Si F es una primitiva de f, tenemos que:

$\displaystyle F(x) = 3a e^{x/3} - \frac{1}{x} + k$

Tenemos que hallar k y a para que:

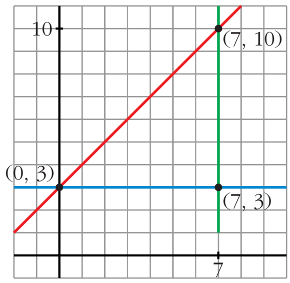
$$\left.\begin{array}{lll} F(1) = 0 & \rightarrow & 3a e^{1/3} - 1 + k = 0 \\ F(2) = \dfrac{1}{2} & \rightarrow & 3a e^{2/3} - \dfrac{1}{2} + k = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3a e^{1/3} + k = 1 \\ 3a e^{2/3} + k = 1 \end{array}\right\}$$

Restando la 2ª ecuación menos la 1ª:

$3a(e^{2/3} - e^{1/3}) = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow k = 1$

Por tanto: $F(x) = -\dfrac{1}{x} + 1$

37 S **Expresa por una integral el área del triángulo de vértices (0, 3), (7, 3) y (7, 10). Explica el significado de la integral escrita.**



• La ecuación de la recta que pasa por (0, 3) y (7, 10) es:

Pendiente $= \dfrac{10 - 3}{7 - 0} = \dfrac{7}{7} = 1$

Ecuación: $y = x + 3$

• La ecuación de la recta que pasa por (0, 3) y (7, 3) es: $y = 3$.

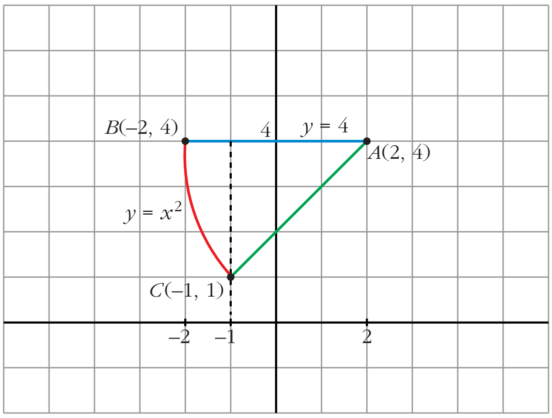
El área del triángulo es el área comprendida entre las dos rectas anteriores y $x = 7$. Así, tenemos que:

$\displaystyle \text{Área} = \int_0^7 [(x+3) - 3] = \int_0^7 x = \text{Área}$

• Calculamos su valor:

$\displaystyle \int_0^7 x = \frac{49}{2}\ \text{u}^2$

38 **S** **Halla el área del triángulo mixtilíneo de vértices $A(2, 4)$, $B(-2, 4)$ y $C(-1, 1)$, en el que las líneas AB y AC son rectas, mientras que la que une los puntos B y C es la de ecuación $y = x^2$.**



• Hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y C:

$$\text{Pendiente} = \frac{4-1}{2-(-1)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{Ecuación: } y = 4 + (x - 2) = x + 2$$

• Calculamos el área pedida:

$$\text{Área} = \int_{-2}^{-1} (4 - x^2) + \int_{-1}^{2} [4 - (x + 2)] = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \int_{-1}^{2} (2 - x) =$$

$$= \left(-4 + \frac{1}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{5}{3} + 2 + \frac{5}{2} = \frac{37}{6} \text{ u}^2$$

39 **S** **La curva $y = a[1 - (x - 2)^2]$, con $a > 0$, limita con el eje de abscisas un recinto de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a.**

• Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas:

$$a[1 - (x - 2)^2] = 0 \;\rightarrow\; (x - 2)^2 = 1 \begin{cases} x - 2 = 1 \;\rightarrow\; x = 3 \\ x - 2 = -1 \;\rightarrow\; x = 1 \end{cases}$$

• Calculamos el área e igualamos a 12:

$$\text{Área} = \int_{1}^{3} a[1 - (x - 2)^2] = a\left[x - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_{1}^{3} = a\left[3 - \frac{1}{3} - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right] =$$

$$= a\left[2 - \frac{2}{3}\right] = \frac{4a}{3} = 12 \;\rightarrow\; a = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9 \;\rightarrow\; a = 9$$