



UNIDAD 3

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

Página 76

Determinantes de orden 2

■ Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{array} \right| = -11 \neq 0$$

Solución: $x = 4$, $y = 7$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{cc} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{array} \right| = 0. \text{ Solución: } x = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}\lambda, y = \lambda$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{array} \right| = 3 \neq 0$$

Solución: $x = 5$, $y = -3$

$$\text{d) } \begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{cc} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{array} \right| = 0. \text{ Incompatible}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{cc} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{array} \right| = 0$$

Solución: $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda$, $y = \lambda$

$$\text{f) } \begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{cc} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{array} \right| = -109 \neq 0. \text{ Solución: } x = \frac{1402}{109}, y = \frac{886}{109}$$

Página 77

Resolución de sistemas 2×2 mediante determinantes

■ Resuelve, aplicando $x = \frac{|A_x|}{|A|}$ e $y = \frac{|A_y|}{|A|}$, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ -5x + 9y = -60 \end{cases} \qquad \text{d) } \begin{cases} 3x - 2y = -19 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$$

Comprueba, en cada caso, la solución que obtengas.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 26; \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 73 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 156; \end{array} \right.$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 73 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -286;$$

$$\text{Por tanto: } x = \frac{156}{26} = 6; \quad y = \frac{-286}{26} = -11$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = -83; \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 4 \\ 13 & -11 \end{vmatrix} = -415; \end{array} \right.$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 5 & 33 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} = -166;$$

$$\text{Por tanto: } x = \frac{-415}{-83} = 5; \quad y = \frac{-166}{-83} = 2$$

$$\text{c) } \begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ -5x + 9y = -60 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = 64; \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -60 & 9 \end{vmatrix} = 192; \end{array} \right.$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -5 & -60 \end{vmatrix} = -320;$$

$$\text{Por tanto: } x = \frac{192}{64} = 3; \quad y = \frac{-320}{64} = -5$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x - 2y = -19 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 24; \quad |A_x| = \begin{vmatrix} -19 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -72; \end{array} \right.$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 120;$$

$$\text{Por tanto: } x = \frac{-72}{24} = -3; \quad y = \frac{120}{24} = 5$$

Página 79

1. Calcula el valor de estos determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 33 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 373 & 141 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

a) $3 \cdot 7 - 4 \cdot 1 = 17$

b) 0, porque la segunda fila es proporcional a la primera.

c) 0, porque la segunda fila solo tiene ceros.

d) $7 \cdot (-2) = -14$

2. Calcula:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} a & b \\ ac & bc \end{vmatrix}$$

a) $a \cdot d - b \cdot c$

b) $a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2 = a^2 \cdot b^2(b - a)$

c) 0, porque la segunda fila solo tiene ceros.

d) $a \cdot b \cdot c - b \cdot a \cdot c = 0$, o también obsérvese que la segunda fila es proporcional a la primera.

Página 80

1. Calcula los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

2. Halla el valor de estos determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1000$$

Página 82

3. Justifica, sin desarrollar, estas igualdades:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

a) Tiene una fila de ceros (propiedad 2).

b) La 3ª fila es proporcional a la 1ª ($3^a = (-2) \cdot 1^a$) (propiedad 6).

c) La 3ª fila es combinación lineal de las dos primeras ($3^a = 1^a + 10 \cdot 2^a$) (propiedad 9).

d) La 1ª fila es combinación lineal de las otras dos ($1^a = 10 \cdot 2^a + 3^a$) (propiedad 9).

4. Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula el resto sin desarrollar:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{a) } \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \frac{1}{5} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Página 83

1. Halla dos menores de orden dos y otros dos menores de orden tres de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Menores de orden dos; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} & -1 & 5 \\ \boxed{4} & \boxed{6} & 2 & 7 \\ 5 & -1 & \boxed{2} & \boxed{6} \\ 4 & 1 & \boxed{1} & \boxed{5} \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

Menores de orden tres; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{-1} & 5 \\ \boxed{4} & \boxed{6} & \boxed{2} & 7 \\ \boxed{5} & \boxed{-1} & \boxed{2} & \boxed{6} \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

2. Halla el menor complementario y el adjunto de los elementos a_{12} , a_{33} y a_{43} de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \alpha_{12} = -1 \cdot (-2) = 2$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 108; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \alpha_{33} = 1 \cdot 108 = 108$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \alpha_{43} = -1 \cdot 16 = -16$$

Página 84

1. Calcula el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus y desarrollándolo por cada una de sus filas y cada una de sus columnas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Comprueba que se obtiene el mismo resultado en los siete casos.

Aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desarrollando por la 1ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) = \\ = -120 + 518 + 58 = 456$$

Desarrollando por la 2ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) = \\ = 180 + 42 + 234 = 456$$

Desarrollando por la 3ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 = \\ = 396 - 104 + 164 = 456$$

Desarrollando por la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 = \\ = -120 + 180 + 396 = 456$$

Desarrollando por la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = \\ = 518 + 42 - 104 = 456$$

Desarrollando por la 3ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 = \\ = 58 + 234 + 164 = 456$$

2. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$a) \begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} -7 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2030$$

(1) Desarrollando por la 2ª columna.

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$$

(1) Desarrollando por la 4ª fila.

También podríamos haber observado que la 4ª columna es igual a la suma de las otras tres; y, por tanto, el determinante vale cero.

Página 85

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Observamos que la 3ª fila es la suma de las dos primeras, y que la 4ª fila es la suma de la 2ª y la 3ª. Por tanto, $\text{ran}(A) = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las anteriores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \rightarrow \text{Las 3 primeras filas son linealmente independientes.}$$

Veamos si la 4ª fila depende linealmente de las anteriores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 23 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\text{ran}(B) = 3$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, las tres primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, entonces $\text{ran}(C) = 4$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, la primera, segunda y cuarta fila son linealmente independientes.

La tercera fila es la suma de las dos primeras. Luego, $\text{ran}(D) = 3$.

Página 87

1. Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$|A'| = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

El sistema es *compatible*.

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A'| = 147 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A) = 2$$

El sistema es *incompatible*.

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de A :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Calculamos el rango de A' :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -76 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A)$$

El sistema es *incompatible*.

2. Siguiendo el mismo proceso que en el ejercicio anterior, averigua si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + \quad z = 2 \\ \quad 2y - z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + \quad z = 2 \\ \quad 2y - z = 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + \quad 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = -13 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + \quad z = 2 \\ \quad 2y - z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de A :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \quad \text{y} \quad |A| = 0 \quad \rightarrow \quad \text{ran}(A) = 2$$

Calculamos el rango de A' :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{pues la } 1^{\text{a}} \text{ y la } 3^{\text{a}} \text{ columna son iguales}) \quad \rightarrow \quad \text{ran}(A') = 2 = \text{ran}(A)$$

El sistema es *compatible*.

OBSERVACIÓN: Como la 4^{a} columna de A' y la 1^{a} son iguales, necesariamente $\text{ran}(A') = \text{ran}(A)$; es decir, el sistema es compatible.

$$\text{b) } \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + \quad z = 2 \\ \quad 2y - z = 5 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $\text{ran}(A) = 2$ (ver apartado a) de este ejercicio).

Calculamos el rango de A' :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A)$$

El sistema es *incompatible*.

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + \quad 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = -13 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $\text{ran}(A) = 2$ (ver apartado c) del ejercicio anterior).

Calculamos el rango de A' :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -13 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{ran}(A') = 2 = \text{ran}(A)$$

El sistema es *compatible*.

Página 88

1. Resuelve mediante la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5$$

Por tanto: $x = 7$, $y = 2$, $z = -5$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -30; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -18$$

Por tanto: $x = 5$, $y = 0$, $z = 3$

2. Resuelve aplicando la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - 4y - z = 4 \\ y + z = 6 \\ 2x + 5y + 7z = -1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 13$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 11 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 65; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 0; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 11 \end{vmatrix} = -26$$

Por tanto: $x = 5$, $y = 0$, $z = -2$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 4y - z = 4 \\ y + z = 6 \\ 2x + 5y + 7z = -1 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\text{ran}(A) < 3$.

Como hay menores de orden 2 distintos de cero, $\text{ran}(A) = 2$.

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ran}(A') = 3$$

Por tanto, este sistema es *incompatible*.

Página 89

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array} \right)$$

Calculamos el rango de A :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \text{y} \quad |A| = 0 \quad \rightarrow \quad \text{ran}(A) = 2$$

Calculamos el rango de A' :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{la } 1^{\text{a}} \text{ y la } 3^{\text{a}} \text{ columna son iguales}) \quad \rightarrow \quad \text{ran}(A') = 2$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 2ª ecuación:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ -2y + 7z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 1 - 3z \rightarrow x = y + 1 - 3z = 1 + \frac{z}{2} \\ -2y = -7z \rightarrow y = \frac{7z}{2} \end{cases}$$

Solución: $x = 1 + \lambda$, $y = 7\lambda$, $z = 2\lambda$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array} \right)$$

Sabemos, por el apartado a), que $\text{ran}(A) = 2$.

Calculamos el rango de A' :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A)$$

El sistema es *incompatible*.

4. Resuelve estos sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

Calculamos el rango de A' :

$$|A'| = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la última ecuación y aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solución: $x = 1, y = 2, z = 3$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 23 \\ -2 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Como $|A'| = -309 \neq 0$, entonces $\text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A)$.

El sistema es *incompatible*.

Página 90

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Por tanto, $\text{ran}(A) = 3 = n^\circ \text{ incógnitas}$.

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$

$$\text{b) } \left. \begin{cases} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{cases} \right\} \begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 = n^\circ \text{ de incógnitas}$$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$

2. Resuelve estos sistemas:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{array} \right. \qquad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left. \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases} \right\} |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Seleccionamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

Podemos suprimir la 3ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left. \begin{cases} x - y = z \\ x + y = -3z \end{cases} \right\} \begin{cases} x = -2z \\ y = -2z \end{cases} \text{ Solución: } x = -\lambda, y = -2\lambda, z = \lambda$$

$$\text{d) } \left. \begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

Para resolverlo, pasamos la t al 2º miembro:

$$\left. \begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y = 2t \\ x - y + z = t \end{cases} \right\} x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2t & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-7t}{-14} = \frac{t}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{7t}{-14} = \frac{-t}{2}; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2t \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0$$

Solución: $x = \lambda, y = -\lambda, z = 0, t = 2\lambda$

Página 92

1. Discute y resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

$$|A| = 4a^2 - 5a - 6 = 0 \rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \begin{cases} a = 2 \\ a = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

• Si $a = 2$, queda:

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}}_A \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A)$$

El sistema es *incompatible*.

• Si $a = -3/4$, queda:

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}}_A \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A)$$

El sistema es *incompatible*.

• Si $a \neq 2$ y $a \neq -3/4 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^\circ \text{ incógnitas} = 3$, el sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}, \quad y = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}, \quad z = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{array} \right\} A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array} \right) \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A$$

$$|A'| = 3k^2 - 11k + 10 = 0 \rightarrow k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} \begin{cases} k = 2 \\ k = \frac{5}{3} \end{cases}$$

• Si $k = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 = n^\circ \text{ incógnitas}$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x - y = 13 \end{array} \right\} \text{Sumando: } 3x = 15 \rightarrow x = 5; \quad y = 2 - x = 2 - 5 = -3$$

Solución: $x = 5, y = -3$

• Si $k = 5/3$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array} \right) \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A$$

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{array} \right| = \frac{-8}{3} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 = n^\circ \text{ incógnitas}$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3}x - y = 13 \end{array} \right\} \text{Sumando: } \frac{8}{3}x = \frac{44}{3} \rightarrow x = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{5}{3} - x = \frac{5}{3} - \frac{11}{2} = \frac{-23}{6}$$

Solución: $x = \frac{11}{2}, y = \frac{-23}{6}$

• Si $k \neq 2$ y $k \neq 5/3 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A)$, el sistema es *incompatible*.

2. Discute y resuelve, en función del parámetro a , el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

• Si $a = 0$, queda:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad y = x. \quad \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

Solución: $x = \lambda, y = \lambda$

• Si $a = 1$, queda:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

Solución: $x = \lambda, y = 0$

• Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0$

Página 93

1. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A :

$$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B :

$$|B| = -3 \neq 0 \rightarrow \text{existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(B) \longrightarrow (\text{Adj}(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(\text{Adj}(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

2. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A :

$$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B :

$$|B| = 3 \neq 0 \rightarrow \text{existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(B) \longrightarrow (\text{Adj}(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(\text{Adj}(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 12 & 21 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 12 & -21 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Página 100

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

- 1 Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 7$, justifica las siguientes igualdades, citando en cada caso las propiedades que has aplicado:

a) $\begin{vmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{vmatrix} = 7$

b) $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} = 42$

c) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -7$

d) $\begin{vmatrix} a & b \\ a-2c & b-2d \end{vmatrix} = -14$

- a) Propiedad 8: si a una columna de una matriz se le suma la otra columna multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.
- b) Propiedad 5: si multiplicamos cada elemento de una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.
- c) Propiedad 3: si permutamos las dos columnas, el determinante cambia de signo.
- d) Propiedad 7: si una fila es suma de dos, el determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes.

2 Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de estos determinantes?

a) $\begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$

a) -5 , porque el determinante coincide con el de su matriz traspuesta.

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} - \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} -3 \begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 3 \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} 2 \begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} -2 \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{m} \cdot m \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

(1) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

(2) Si cambiamos de orden dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

(3) Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

3 Sustituye los puntos suspensivos por los números adecuados para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & 7 \\ \dots & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

4 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$ b) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^2 - (1-x)^2 = 1+x^2+2x - (1+x^2-2x) = \\ = 1+x^2+2x-1-x^2+2x = 4x = 12 \rightarrow x = 3$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 \cdot (x-2) - x(1-2x) = x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 = x^3 - x =$$

$$= x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

5 Calcula el valor de estos determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

6 ¿Qué valor de a anula estos determinantes?

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -3 + 5 + 4 - 5 + 3 - 4a = 4 - 4a = 0 \rightarrow a = 1$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) + (a-1)(a+6) - 6(a-1) = (a-1)[3+a+6-6] = \\ = (a-1)(3+a) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 4 - 4 - 12 = 4a^2 - 12 = 0 \rightarrow a^2 = 3 \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} &= 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 = \\
 &= 4a + 4 + 2a - 2 - a^3 - a^2 \cdot 2 = -a^3 - a^2 + 6a = -a(a^2 + a - 6) = 0 \rightarrow \\
 &\begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 6 = 0 \rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \end{cases} \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

7 Calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} &= -72 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -18
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 0 \quad \text{d) } \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 938
 \end{aligned}$$

8 Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices y comprueba el resultado:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

a) $|A| = 1 \neq 0 \rightarrow$ existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $|B| = 10 \neq 0 \rightarrow$ existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(B) \longrightarrow (\text{Adj}(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|} (\text{Adj}(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

c) $|C| = 3 \neq 0 \rightarrow$ existe C^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(C) \longrightarrow (\text{Adj}(C))^t \longrightarrow \frac{1}{|C|}(\text{Adj}(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

d) $|D| = -10 \neq 0 \rightarrow$ existe D^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(D) \longrightarrow (\text{Adj}(D))^t \longrightarrow \frac{1}{|D|}(\text{Adj}(D))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = D^{-1}$$

9 Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

S

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $X \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, de manera que tenemos:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Calculamos A^{-1} :

$$|A| = -3 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos $A^{-1} \cdot B$:

$$\frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Llamamos $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, de manera que:

$$X \cdot A = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

$$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

Calculamos A^{-1} :

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos $B \cdot A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \end{pmatrix}$$

La solución es: $X = \begin{pmatrix} 6 & -7 \end{pmatrix}$

10 Estudia el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) El rango es 3 ya que el determinante } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0.$$

$$\text{b) } 4^{\text{a}} \text{ fila} = 2^{\text{a}} \text{ fila} - 1^{\text{a}} \text{ fila}$$

$$3^{\text{a}} \text{ fila} = 1^{\text{a}} \text{ fila} + 2^{\text{a}} \text{ fila}$$

$$\text{Por tanto: } \text{ran} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{ran} \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{El rango es 2}$$

11 Resuelve aplicando la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{array} \right\} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_A \left| \begin{array}{l} 2 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right. \rightarrow |A| = 1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solución: $x = -1, y = -5, z = 7$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{array} \right\} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \left| \begin{array}{l} -2 \\ 1 \\ -3 \end{array} \right. \rightarrow |A| = -11 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{11}{-11} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-22}{-11} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{22}{-11} = -2$$

Solución: $x = -1, y = 2, z = -2$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{array} \right\} |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Por tanto: $x = \frac{-1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{-1}{3}$

$$d) \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{cases} A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}}_A \right). \text{ Tenemos que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 2+t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & -1 \\ 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t. \text{ Soluciones: } \left(\frac{3+\lambda}{2}, \frac{-1-\lambda}{2}, \lambda, \lambda \right)$$

Página 101

12 Estudia la compatibilidad de estos sistemas:

S

$$a) \begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases} A' = \left(\underbrace{\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{array}}_A \right). \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \text{ y } |A'| = 0,$$

tenemos que: $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^{\circ} \text{ incógnitas} = 2$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Sumando: } 5x = 5 \rightarrow x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array} \right\} \text{ Solución: } (1, -5)$$

$$b) \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases} A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}}_A \right).$$

Tenemos que $|A| = 0$ y que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A) = 2$

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

13 Calcula la inversa de las siguientes matrices:

S

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(B) \longrightarrow (\text{Adj}(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} (\text{Adj}(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

PARA RESOLVER

14 Prueba, sin desarrollar, que estos determinantes son cero:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

• a) Hay dos líneas proporcionales. b) Suma la 3ª fila a la 2ª.

a) La 1ª y la 3ª columnas son proporcionales (la 3ª es -5 por la 1ª).

b) Sumamos la 3ª fila a la 2ª:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= 5(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0 \text{ (pues tiene dos filas iguales).}$$

15 Prueba que el determinante a) es múltiplo de 3 y el b) múltiplo de 5:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

• a) Suma la 1ª y 2ª columnas a la 3ª.

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 8 & 2 & 15 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Es múltiplo de 3.}$$

(1) Sumamos a la 3ª columna las otras dos.

(2) Si una columna se multiplica por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

$$\text{b) } |B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Es múltiplo de 5.}$$

(3) Sumamos a la 3ª fila la 2ª.

16 ¿Para qué valores de a se anula este determinante?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a + 1^a \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -[8(a+1) - 30 + 6] = -[8a + 8 - 30 + 6] = -(8a - 16) = 0 \rightarrow a = 2$$

17 Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$$

• Si $a = 2 \rightarrow$ Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

• Si $a \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{7 \pm 9}{-2} \begin{cases} a = -8 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{Observamos que } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(B) \geq 2$$

Por tanto:

- Si $a = 1 \rightarrow |B| = 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 2$
- Si $a = -8 \rightarrow |B| = 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 2$
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -8 \rightarrow |B| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 3$

18 Estudia y resuelve estos sistemas homogéneos:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 12 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0, \text{ entonces, } \text{ran}(A) = 2.$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación y pasar la z al 2º miembro:

$$\begin{cases} x + y = z \\ x - 2y = -z \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

$$\text{Soluciones: } \left(\frac{\lambda}{3}, \frac{2\lambda}{3}, \lambda \right)$$

$$\text{b) } \begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0, \text{ entonces: } \text{ran}(A) = 3 = n^\circ \text{ incógnitas.}$$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$

19 Resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \\ 3x + 2y + t = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + t = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \\ 3x + 2y + t = 0 \end{cases}$$

Observamos que la 3ª ecuación es la suma de las dos primeras, por lo tanto la eliminamos. El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

Pasamos al segundo miembro dos de las incógnitas para resolverlo por Cramer, teniendo que ser el determinante de la matriz de los coeficientes que quedan en el primer miembro no nulo:

$$\begin{cases} x + y = -z + t \\ 2x + y = z - 2t \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Aplicamos la regla de Cramer:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -z + t & 1 \\ z - 2t & 1 \end{vmatrix} = -2z + 3t; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -z + t \\ 1 & z - 2t \end{vmatrix} = 3z - 4t$$

Solución: $x = 2\lambda - 3\mu$, $y = -3\lambda + 4\mu$, $z = \lambda$, $t = \mu$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + t = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema homogéneo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 4 = n^\circ \text{ de incógnitas}$$

El sistema solo tiene la solución trivial, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$.

20 Encuentra el valor de a para que este sistema sea compatible: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \\ ax + y = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \\ ax + y = 3 \end{cases} \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad |A'| = 6 - 7a = 0 \rightarrow a = \frac{6}{7}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Si $a = \frac{6}{7}$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A')$ \rightarrow Sistema compatible.

Si $a \neq \frac{6}{7}$, $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A')$ \rightarrow Sistema incompatible.

21 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot X = C \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \rightarrow X = A^{-1} \cdot C$$

Calculamos A^{-1} :

$$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x = -2$, $y = -4$

b) $\begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot X = C \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \rightarrow X = A^{-1} \cdot C$$

Calculamos A^{-1} :

$$|A| = -20 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 10 & 5 & -5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ -10 & 5 & 5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{-20} \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \frac{1}{-20} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-20} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x = \frac{2}{5}$, $y = 0$, $z = \frac{7}{5}$

22 Estudia y resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{cases} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 2 \\ 2 & 1 & 3 & | & 1 \\ 3 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}}_A$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos que $\text{ran}(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Luego, $\text{ran}(A') = 2 = \text{ran}(A) < n^{\circ}$ incógnitas.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la primera ecuación:

$$\left. \begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{cases} \right\} \begin{cases} 2x + y = 1 - 3z \\ 3x = 3 - z \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3-z}{3} = 1 - \frac{z}{3} \\ y = 1 - 3z - 2x = -1 - \frac{7z}{3} \end{array} \right. \text{ Hacemos } z = 3\lambda$$

Soluciones: $x = 1 - \lambda$, $y = -1 - 7\lambda$, $z = 3\lambda$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -2 & -7 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 2 & 3 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}}_A$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$,

tenemos que: $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^{\circ}$ incógnitas = 3

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la cuarta ecuación. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solución: $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$

23 Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m :

S

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{matrix}}_A \mid \begin{matrix} 4 \\ m \\ 2 \end{matrix} \right)$

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

• Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{matrix} \right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{Contradictorias} \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

• Si $m = -1$, queda:

$$A' = \left(\begin{matrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{matrix} \right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{Contradictorias} \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

• Si $m \neq 1$ y $m \neq -1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^\circ \text{ incógnitas} = 3$. Sistema *compatible determinado*.

$$b) \left. \begin{array}{l} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array} \right\} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}}_A \left| \begin{array}{l} m - 1 \\ m \\ 1 \end{array} \right.$$

$$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

• Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \text{Contradictorias} \rightarrow \text{El sistema es incompatible.}$$

• Si $m = 2$, queda:

$$A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)}_A. \text{ Las columnas } 1^{\text{a}}, 3^{\text{a}} \text{ y } 4^{\text{a}} \text{ son iguales.}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = \text{ran}(A) = 2 < n^{\circ} \text{ inc\u00f3gnitas}$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^{\circ} \text{ inc\u00f3gnitas} = 3$. Sistema *compatible determinado*.

$$c) \left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array} \right\} A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right)}_A$$

$$|A| = -2m + 2 = 0 \rightarrow m = 1$$

• Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right). \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

entonces: $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. Sistema *incompatible*.

• Si $m \neq 1$, queda: $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^{\circ} \text{ inc\u00f3gnitas} = 3$. Sistema *compatible determinado*.

$$d) \begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

• Si $m = 3$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{Contradictorias} \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

• Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad \text{La 1ª y la 3ª fila son iguales.}$$

$$\text{Además } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \text{ Luego, } \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ incógnitas.}$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $m \neq 3$ y $m \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^\circ \text{ incógnitas} = 3$. Sistema *compatible determinado*.

24 S Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a :

$$a) \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases} \quad A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{array} \right)$$

Como es homogéneo, sabemos que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A')$.

$$|A| = -5a - 25 = 0 \rightarrow a = -5$$

• Si $a = -5 \rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a \neq -5 \rightarrow$ Solo tiene la solución trivial $(0, 0, 0)$.

$$b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A')$.

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

• **Si $a = -3$ o $a = 2$** \rightarrow Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• **Si $a \neq -3$ y $a \neq 2$** $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$. Solo existe la solución trivial $(0, 0, 0)$.

Página 102

25 a) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y calcula el rango de las matrices AA^t y A^tA .

b) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es A^tA .

c) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es AA^t .

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango} = 2$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango} = 2$$

b) Como el rango es 2, seleccionamos el menor

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Podemos suprimir la tercera ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\begin{cases} 5x + 2y = -z \\ 2x + y = -z \end{cases} \rightarrow x = z, y = -3z$$

La solución es: $x = \lambda, y = -3\lambda, z = \lambda$

c) Como el rango = 2 = n° de incógnitas

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0$

26 Dadas $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Halla A^{-1} y B^{-1} .

b) Halla la matriz inversa de $A \cdot B$.

c) Comprueba que $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

a) $|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$|B| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(B) \longrightarrow (\text{Adj}(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(\text{Adj}(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}; |A \cdot B| = 4 \neq 0 \rightarrow$ Existe $(A \cdot B)^{-1}$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(AB) \longrightarrow (\text{Adj}(AB))^t \longrightarrow \frac{1}{|AB|}(\text{Adj}(AB))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -8 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = (AB)^{-1}$$

c) $B^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (A \cdot B)^{-1}$

27 **S** Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina la matriz B que verifica $B - I = A^t A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1} :

$$|A| = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos $A^t \cdot A^{-1}$:

$$A^t \cdot A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = A^t \cdot A^{-1} + I$$

$$B = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

28 **S** Discute el siguiente sistema y resuélvelo, si es posible, en el caso $a = 4$:

$$\begin{cases} x - y & = a \\ x & + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a - 1)z & = 2a \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} x - y & = a \\ x & + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a - 1)z & = 2a \end{cases} \right\}$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a - 1) \end{pmatrix}$$

$$|A| = a(a - 1) \rightarrow |A| = 0 \rightarrow a = 0, a = 1$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, $\text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A')$.

El sistema es *compatible determinado*. Son solución:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2a+1 & 0 & a^2 \\ 2a & -1 & a(a-1) \end{vmatrix} = a \cdot (a^2 - a - 1)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2a+1 & a^2 \\ 1 & 2a & a(a-1) \end{vmatrix} = -a$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} = a$$

La solución es: $x = \frac{a^2 - a - 1}{a - 1}$, $y = \frac{-1}{a - 1}$, $z = \frac{1}{a - 1}$

- Si $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$
- $$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

Para resolverlo, tomamos las dos primeras ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x = 1 \end{array} \right\}$$

Solución: $x = 1$, $y = 1$, $z = \lambda$

- Si $a = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$
- $$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

El sistema es *incompatible*.

- Si $a = 4$, se trata de un sistema *compatible determinado*, resuelto en el primer caso, con solución:

$$x = \frac{11}{3}, y = \frac{-1}{3}, z = \frac{1}{3}$$

29 Sea $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

S

a) Halla los valores de x para que los que A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

a) Existe A^{-1} solo cuando $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \neq 0 \text{ si } x \neq 0$$

Luego, existe A^{-1} para todo $x \neq 0$.

b) Para $x = 2$, tenemos que $|A| = 2 \neq 0$, luego existe A^{-1} en este caso. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

30 Dadas las matrices:

S

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que verifica $AB + CX = D$.

$$AB + CX = D \rightarrow CX = D - AB \rightarrow X = C^{-1} \cdot (D - AB)$$

• Calculamos C^{-1} ($|C| = -2 \neq 0 \rightarrow$ existe C^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(C) \longrightarrow (\text{Adj}(C))^t \longrightarrow \frac{1}{|C|}(\text{Adj}(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

• Calculamos $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

• Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

31 Halla X tal que $3AX = B$, siendo:

S

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3AX = B \rightarrow X = \frac{1}{3} A^{-1} \cdot B$$

Calculamos A^{-1} ($|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

32 Resuelve la ecuación $AXB = C$ siendo:

S

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• **Multiplíca C por A^{-1} por la izquierda y por B^{-1} por la derecha.**

$$AXB = C \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Calculamos A^{-1} y B^{-1} ($|A| = 1$ y $|B| = 1 \rightarrow$ existen A^{-1} y B^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(B) \longrightarrow (\text{Adj}(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|} (\text{Adj}(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

33 Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

S

• Multiplica dos veces por A^{-1} , una vez por la izquierda y otra por la derecha.

Calculamos A^{-1} ($|A| = 1 \neq 0 \rightarrow$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} AXA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

34 Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución y hállala si es posible:

S

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_A X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

Como $|A| = 0$, no existe A^{-1} . La ecuación *no* tiene solución.

$$\text{b) } \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_A X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_B$$

Como $|A| = 4 \neq 0$, existe A^{-1} y la ecuación tiene solución.

$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$. Hallamos A^{-1} :

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

35 Resuelve la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Como $AX + B = C \rightarrow X = A^{-1}(C - B)$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_B \quad \text{Calculamos } A^{-1} (|A| = 16 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}):$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

36 Resuelve la ecuación:

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$X \cdot A - B = C \rightarrow X \cdot A = C + B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (C + B) \cdot A^{-1} \rightarrow \\ \rightarrow X = (C + B) \cdot A^{-1}$$

$$C + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

Calculamos A^{-1} :

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 24 & 3 & -10 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & -3 & -10 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & -14 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

37 ¿Existe algún valor de a para el cual este sistema tenga infinitas soluciones?

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases} \right\} A' = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \mid \begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{matrix} \right)$$

$$|A| = 9a + 27 = 0 \rightarrow a = -3$$

• Si $a = -3$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20, \text{ entonces:}$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3 \rightarrow \text{El sistema es incompatible.}$$

• Si $a = -3 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ Compatible determinado.

Por tanto, no existe ningún valor de a para el que el sistema tenga infinitas soluciones.

Página 103

38 Prueba, sin desarrollar el determinante, que:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$$

☛ Restar la primera fila a la segunda y a la tercera.

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^a & & \\ 2^a - 1^a & & \\ 3^a - 1^a & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

pues las dos últimas filas son proporcionales.

39 Calcula:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 0 + 0 = 0$$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Hay dos filas iguales en cada uno de los determinantes.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

pues es el determinante de una matriz diagonal y los elementos de la diagonal son 1.

40 Obtén en función de a, b, c el valor de: $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix}$

☛ Restar la tercera columna a las dos primeras.

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1^2 - 3^2 \\ 2^2 - 3^2 \\ 3^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -c & 0 \\ b & -c & 0 \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & -c \\ b & -c \end{vmatrix} = abc$$

41 Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=}$
 $= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Sacamos $\frac{1}{2}$ factor común de la 3ª fila. El 2º determinante es 0, pues las dos primeras filas son proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$

(1) Cuando cambiamos de orden dos filas consecutivas, el determinante cambia de signo.

42 Calcula los valores de a para los cuales el rango de A es menor que 3:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$ ¿Puede ser $\text{ran}(A) = 1$ para algún valor de a ?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$

El rango de A es menor que 3 si $|A| = 0$.

$|A| = -(a-1)(a-3)$

$|A| = 0$ si $a = 1$ o $a = 3$

Por tanto: si $a = 1$ o $a = 3 \rightarrow \text{ran}(A) < 3$

- El $\text{ran}(A)$ no puede ser 1, porque si nos fijamos en el menor:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -a \end{vmatrix} = -12 \neq 0, \text{ independientemente del valor de } a.$$

CUESTIONES TEÓRICAS

- 43 El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3. ¿Qué puedes decir de su solución?**

Al ser el sistema homogéneo con 3 incógnitas, tenemos que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = = n^{\circ} \text{ incógnitas} = 3$. El sistema sería compatible determinado. Por tanto, tendría como solución única la solución trivial $(0, 0, 0)$.

- 44 En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0.**

- a) ¿Puede ser compatible?
 b) ¿Puede tener solución única?
 c) ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?

- a) Sí, podría ser compatible indeterminado si $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') < n^{\circ} \text{ incógnitas}$.
 b) No, pues al ser $\text{ran}(A) < n^{\circ} \text{ incógnitas}$, el sistema no puede ser compatible determinado.
 c) Sí, si es compatible, pasando al 2º miembro las incógnitas que sea necesario.

- 45 ¿Qué condición debe cumplir una matriz cuadrada para tener inversa?**

La condición necesaria y suficiente para que una matriz, A , cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero, es decir, $|A| \neq 0$.

- 46 Sean A y B inversas una de otra. Si $|A| = 4$, ¿cuánto vale $|B|$?**

Si A y B son inversas una de otra, entonces $A \cdot B = I$. Así:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |I| = 1 \rightarrow |B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

- 47 El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es igual a 1.**

¿Qué rango, como máximo, puede tener la matriz ampliada?

Como máximo, la matriz ampliada podrá tener rango 2.

48 ¿Existe algún valor de a para el cual la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa?

$$\begin{vmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 + 2 = 2 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } a.$$

Por tanto, no existe ningún valor de a para el que la matriz dada no tenga inversa.

PARA PROFUNDIZAR

49 a) ¿Para qué valor de a este sistema es compatible determinado?

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

b) ¿Puede ser compatible indeterminado?

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ x - 3z = -1 \\ y - z = -2 \\ y + z = 2 \end{array} \right\} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}}_A$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ 1^{\circ} \\ 2^{\circ} - 1^{\circ} \\ 3^{\circ} \\ 4^{\circ} \end{array} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a - 14 = 0$$

$$\rightarrow a = 14$$

Por tanto, $\begin{cases} \bullet \text{ Si } a = 14 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 \rightarrow \text{Compatible determinado} \\ \bullet \text{ Si } a \neq 14 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 \neq \text{ran}(A') = 4 \rightarrow \text{Incompatible} \end{cases}$

b) No, por lo que hemos visto en el apartado anterior.

50 Calcula el valor de este determinante dando el resultado factorizado:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} (3+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{matrix}$$

$$(3+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} (3+3x) \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = \\ = (3+3x)(3-x)^3 = 3(1+x)(x-3)^3$$

(1) Sumamos a la 1ª columna las demás.

(2) Sacamos $(3+3x)$ factor común, de la 1ª columna.

(3) Desarrollamos por la 1ª columna.

51 Discute los siguientes sistemas según los valores de los parámetros que contienen:

$$\text{a) } \begin{cases} x-3y+z=a \\ x & -z=b \\ x & +z=c \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+3y-2z=-8 \\ 4x+y+az=b \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x-3y+z=a \\ x & -z=b \\ x & +z=c \end{cases} \left\{ A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \right.$$

$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^{\circ} \text{ incógnitas} \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de a , b y c .

$$\text{a) } \begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+3y-2z=-8 \\ 4x+y+az=b \end{cases} \left\{ A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}}_A \begin{vmatrix} 2 \\ -8 \\ b \end{vmatrix} \right. \quad |A| = 5a = 0 \rightarrow a = 0$$

• Si $a = 0$, queda:

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{vmatrix} 2 \\ -8 \\ b \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix} = 5b + 20 = 0 \rightarrow b = -4$$

• Si $a = 0$ y $b = -4 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas}$. El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a = 0$ y $b \neq -4 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema es *incompatible*.

• Si $a \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n^{\circ} \text{ incógnitas} = 3$. El sistema es *compatible determinado*, cualquiera que sea el valor de b .