INTERACCIÓN GRAVITATORIA
LEYES DE KEPLER

Tras un concienzudo análisis de miles de datos recopilados por el astrónomo Tycho Brahe para la órbita de Marte, Kepler enunció las leyes del movimiento planetario.

Leyes de Kepler

- **Primera Ley de Kepler (1609. Astronomía Nova)**

  "Los planetas describen órbitas elípticas, estando el sol en uno de sus focos."

- **Segunda Ley de Kepler (1609. Astronomía Nova)**

  "El vector de posición de cualquier planeta con respecto del Sol (vector que tiene el origen en el Sol y su extremo en el planeta considerado) barre áreas iguales en tiempos iguales."

  En la figura (si se supone que t es el mismo): $A_1 = A_2$

  De forma general: $\frac{A_1}{t} = \frac{A_2}{t}$

  El cociente $v_A = \frac{A}{t}$ mide la rapidez con que el radio vector barre el área A y se conoce como

  velocidad areolar.

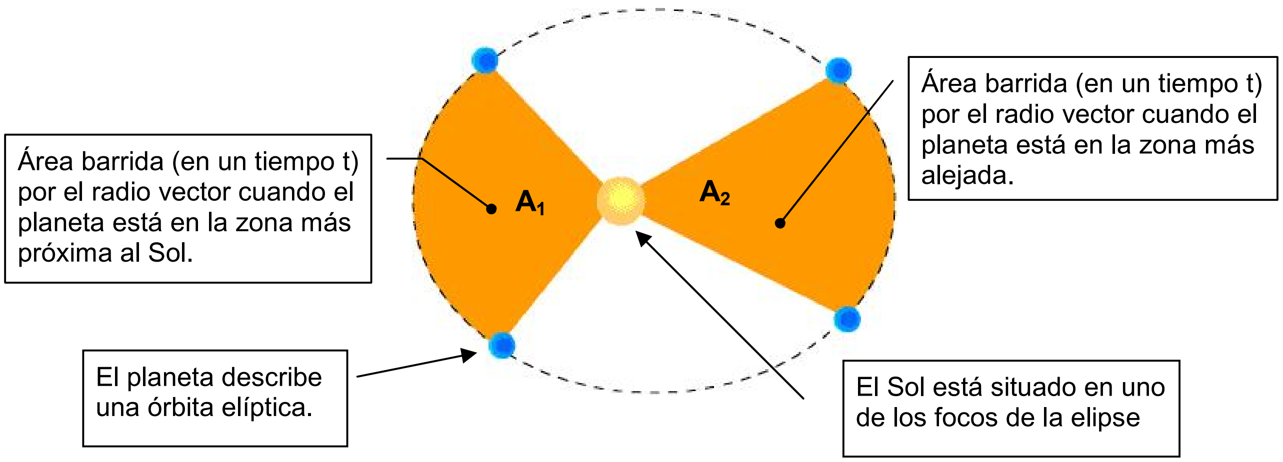
- **Tercera Ley de Kepler (1619. Harmonicis Mundi)**

  "Los cuadrados de los periodos de revolución (T) son proporcionales a los cubos de las distancias promedio de los planetas al sol (r)."

  $$T^2 = k\,r^3$$

  Donde ***k*** es una constante de proporcionalidad (constante de Kepler) que depende de la masa del astro central. Para el Sistema Solar $k = 3.10^{-19}\ s^2/m^3$

  r coincide con el valor del ***semieje mayor*** para órbitas elípticas.



Las leyes de Kepler son fenomenológicas. Es decir, se limitan a describir de manera cinemática cómo se mueven los planetas en sus órbitas alrededor del Sol, ***pero nada dicen acerca de las causas que provocan ese movimiento.***

Aunque las leyes fueron enunciadas inicialmente para el Sistema Solar son aplicables a cualquier objeto celeste que orbite alrededor de otro astro central.

Para comprender las verdaderas causas del movimiento planetario habría que esperar a que Newton, en 1687, enunciara la Ley de Gravitación Universal. Las leyes de Kepler surgen entonces como consecuencias de la naturaleza de la fuerza gravitatoria.

¿Cuánto de elíptica?

Aunque estrictamente la órbita descrita por la Tierra en su movimiento alrededor del Sol es una elipse, realmente se aproxima mucho a un círculo.

La excentricidad de la elipse para la órbita terrestre tiene un valor e = 0,017. Una excentricidad cero corresponde a un círculo. Cuanto más se aleje de cero más aplanada será la elipse. El valor máximo, 1, se correspondería con una recta.

La distancia de la Tierra al Sol en el punto más próximo (perihelio) es de 147 055 091 km.

La distancia de la Tierra al Sol en el punto más alejado (afelio) es de 152 141 431 km.

Aunque la diferencia (unos 5 000 000 km) puede parecer considerable, en realidad se corresponde con un escaso 3 % de diferencia entre ambos valores.

La órbita de Marte tiene una excentricidad considerable. Debido a esa acusada excentricidad fue al intentar resolver su órbita donde surgieron las mayores diferencias respecto de la órbita circular.

Planeta	Excentricidad	Comparación
Mercurio	0,206	12,12
Venus	0,007	0,41
Tierra	0,017	1,00
Marte	0,093	5,47
Júpiter	0,048	2,82
Saturno	0,054	3,18
Urano	0,047	2,76
Neptuno	0,009	0,53

Se denomina excentricidad de la elipse a la relación entre la distancia focal, c, y el semieje mayor, a:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$$

- ***Si c = 0, la excentricidad es nula y tenemos una circunferencia.***
- ***Si c = a, la excentricidad es la unidad y tenemos una recta.***

Recordando la expresión de c en función de a y b también podemos expresar la excentricidad como:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Ejemplo 1

La Tierra orbita alrededor del Sol con un periodo de 365,25 días. Calcular la distancia media entre la Tierra y el Sol.

DATOS: La constante de Kepler para el Sistema Solar vale: $k = 3.10^{-19}\ s^2/m^3$

Solución:

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k\, r^3$ y despejamos la incógnita (r):

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{\left(3{,}16.10^7\right)^2 \cancel{s^2}}{3.10^{-19}\, \frac{\cancel{s^2}}{m^3}}} = 1{,}49.10^{11}\,m = 1{,}49.10^8\,km = 149.10^6\,km$$

NOTA: La distancia media entre el Sol y la Tierra es de unos 150 millones de km (149 597 870 km) y es usada en astronomía como medida de distancia. Se le da el nombre de ***unidad astronómica (ua).***

En la tabla de la derecha se comparan las distancias de los planetas al Sol (en ua) medidas por Copérnico y las actuales.

(Fuente : Wikipedia)

Planeta	Copérnico (ua)	Actual (ua)
Mercurio	0,386	0,387
Venus	0,719	0,723
Marte	1,520	1,524
Júpiter	5,219	5,203
Saturno	9,174	9,555

Ejemplo 2

Marte se encuentra situado a una distancia media del Sol de 1,52 ua. ¿Cuál es el periodo orbital de Marte alrededor del Sol?

DATOS: 1 ua= 150 .10^6 km; : k = 3.10^{-19} s^2/m^3

Solución:

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k\, r^3$ y despejamos la incógnita (T):

$$T = \sqrt{k\, r^3} = \sqrt{3.10^{-19}\,\frac{s^2}{\cancel{m^3}}\,\left(2{,}28.10^{11}\right)^3 \cancel{m^3}} = 5{,}96.10^7\, s = 690{,}2\ dias$$

NOTA: El periodo orbital para Marte ("año marciano") es de 686,98 días.

Ejemplo 3

Europa, una de las lunas de Júpiter, está situada a una distancia media de 6,71 10^3 km del planeta y tiene un periodo orbital de 3,5541 días.

a) ¿Cuál es el valor de la constante de Kepler para el sistema formado por Júpiter y sus lunas?
b) Apoyándote en el dato anterior calcula la distancia media a la que orbita Ganímedes, otra luna de Júpiter, sabiendo que su periodo de revolución es de 7,1664 días.

Solución:

Apoyándonos en la tercera ley de Kepler y usando los datos de Europa obtenemos:

$$T^2 = k_J\, r^3$$

$$k_J = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(3{,}07.10^5)^2\ s^2}{(6{,}71.10^5)^3\ m^3} = 3{,}12.10^{-7}\,\frac{s^2}{m^3}$$

Volvemos ahora a utilizar la tercera ley de Kepler para obtener el dato solicitado para Ganímedes. Como constante usaremos ahora la calculada para el sistema formado por Júpiter y sus satélites:

$$T^2 = k_J\, r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k_J}} = \sqrt[3]{\frac{(6{,}1918.105)^2\ \cancel{s^2}}{3{,}12.10^{-7}\,\frac{\cancel{s^2}}{m^3}}} = 1{,}07.10^6 m$$

Ejemplo 4

Si la excentricidad de la órbita terrestre vale 0,017 y la longotud del semieje mayor es 149 598 261 km, ¿Cuál es el valor del semieje menor y la distancia focal de la órbita terrestre?

Solución:

Para calcular el valor del semieje menor y la distancia focal hacemos uso de la expresión de la excentricidad de una elipse:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$c = \varepsilon\, a = 0{,}017.\ 149\ 598\ 261\ \ km = 2\ 543\ 170\ km$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\ ;\ \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}\ ;\ \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$$

$$b = a\,\sqrt{(1-\varepsilon^2)} = 149\ 598\ 261\ \ km\,\sqrt{(1 - 0{,}017^2)} = 149\ 576\ 643\ km$$

La diferencia entre el semieje mayor y el menor de la órbita terrestre es, por tanto, de 21 618 km. El semieje menor es un 0,01445% más corto que el mayor, lo que vuelve a confirmar lo próxima que está la órbita terrestre a un círculo.

INTERACCIÓN GRAVITATORIA

LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Fue **Isaac Newton (1642 – 1727)** quien dio el siguiente gran paso en la explicación del movimiento planetario al enunciar su **Ley de Gravitación Universal** (formulada en 1666 y publicada en 1687)

Ley de Gravitación Universal

"Los cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa."

Masas de los cuerpos en kg

Vector unitario.
Dirección: la de la recta que une los cuerpos.
Sentido: saliendo del cuerpo que se considera que atrae.

$$\vec{F} = -G\,\frac{m\,M}{d^2}\,\vec{u}_r$$

Fuerza de atracción gravitatoria. Si se consideran cuerpos grandes la fuerza apunta hacia el centro de los mismos.

Distancia entre los cuerpos en metros. Si son cuerpos grandes, la distancia se toma entre los centros.

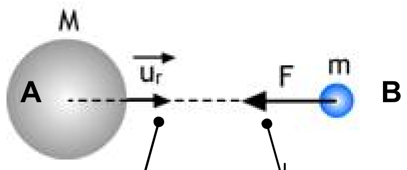
El signo menos, tal y como se define el vector unitario, garantiza que ***la fuerza es siempre atractiva.***

Constante de Gravitación Universal. Tiene el mismo valor para todo el Universo.

Para el S.I:

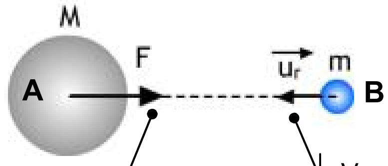
$$G = 6{,}67\;10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2} = 6{,}67\;10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}$$

Debido a la pequeñez de la constante de gravitación la fuerza de gravedad sólo es apreciable entre cuerpos cuya masa sea muy grande (planetas, estrellas…)



Vector unitario. Sale del cuerpo que se supone que atrae.

Fuerza con la que el cuerpo A atrae a B. Sentido contrario a u_r



Fuerza con la que el cuerpo B atrae a A. Sentido contrario a u_r

Vector unitario. Sale del cuerpo que se supone que atrae.

Ejemplo 1

Calcular el módulo de la fuerza con que una masa de 1 000 kg atrae a otra de 100 kg si ambas están situadas a una distancia de 20 m.
Comparar el resultado obtenido con la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo de 50 kg situado en su superficie.
DATOS: M_{Tierra}: $6{,}0\ 10^{24}$ kg ; R_{Tierra}= $6{,}4\ 10^{6}$ m

Solución

La fuerza con la que se atraen dos masa de 1 000 y 100 kg valdrá:

$$F = G\,\frac{m\,M}{d^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{100\,\cancel{kg}\;1000\,\cancel{kg}}{20^2\,\cancel{m^2}} = 1{,}67\,10^{-8}\,N$$

Fuerza prácticamente inmedible debido a su pequeñez.

Sin embargo, la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo de 50 kg situado en su superficie valdrá:

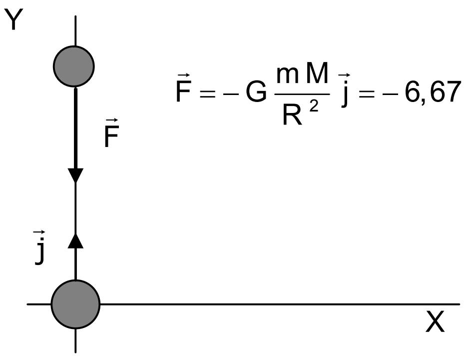
$$F = G\,\frac{m\,M}{R^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{50\,\cancel{kg}\;6\,10^{24}\,\cancel{kg}}{(6{,}4\,10^6)^2\,\cancel{m^2}} = 488{,}5\,N$$

Que es una fuerza apreciable ya que la masa de la Tierra es muy grande.

Ejemplo 2

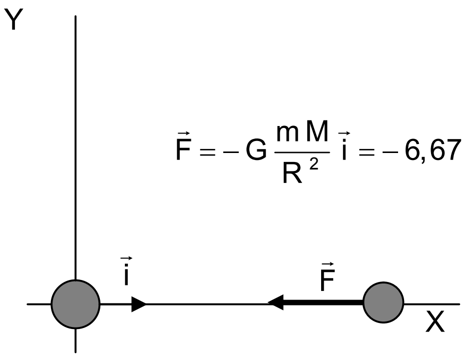
Una masa de $5{,}2\ 10^{13}$ kg se supone que está situada en el origen de coordenadas.
Calcular la fuerza de atracción ejercida sobre otra de $3{,}5\ 10^{6}$ kg situada a 10 km de distancia en el eje y.
Repetir el cálculo suponiendo que ahora la masa se sitúa sobre el eje x

Solución



$$\vec{F} = -\,G\,\frac{m\,M}{R^2}\,\vec{j} = -\,6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{5{,}2\ 10^{13}\,\cancel{kg}\;3{,}5\,10^{6}\,\cancel{kg}}{(10^4)^2\,\cancel{m^2}}\,\vec{j} = -\,121{,}4\,\vec{j}\,(N)$$

La fuerza tiene un módulo de 121,4 N y apunta en sentido contario al vector unitario j. Esto es hacia abajo (atracción)



$$\vec{F} = -\,G\,\frac{m\,M}{R^2}\,\vec{i} = -\,6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{5{,}2\ 10^{13}\,\cancel{kg}\;3{,}5\,10^{6}\,\cancel{kg}}{(10^4)^2\,\cancel{m^2}}\,\vec{i} = -\,121{,}4\,\vec{i}\,(N)$$

La fuerza tiene el mismo módulo, pero ahora apunta en sentido contario al vector unitario i. Esto es hacia la izquierda (atracción)

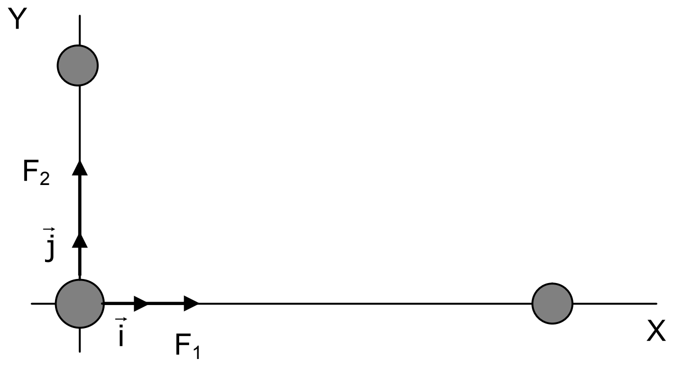
La fuerza que una masa ejerce sobre otra no se ve afectada por la presencia de una tercera masa. Cada una de ellas atrae a la masa considerada superponiéndose ambas fuerzas. ***La fuerza resultante sobre la masa es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas*** **(Principio de Superposición).**

Ejemplo 3

Una masa de 3,2 10^{13} kg está en el origen de coordenadas, otra de 5,4 10^{6} kg se sitúa a 5 km de distancia en el eje y una tercera de 4,6 10^{7} kg sobre el eje X a una distancia de 10 km.

Calcular la fuerza resultante actuante sobre la masa situada en el origen de coordenadas.

Solución



La fuerza ejercida por la masa situada sobre el eje X, vale:

$$\vec{F}_1 = G\frac{m_2\,M}{d_1^2}\,\vec{i} = -\,6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{3,2\;\;10^{13}\,\cancel{kg}\;4,6\,10^{7}\;\;\cancel{kg}}{(10^4)^2\;\;\cancel{m^2}}\;\vec{j} = 981,8\;\vec{i}\;(N)$$

La fuerza ejercida por la masa situada sobre el eje Y, vale:

$$\vec{F}_2 = G\frac{m_2\,M}{d_2^2}\,\vec{j} = -\,6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\;\frac{3,2\;\;10^{13}\,\cancel{kg}\;5,4\,10^{6}\;\;\cancel{kg}}{(5\,10^3)^2\;\;\cancel{m^2}}\;\vec{j} = 461,0\,\vec{j}\;(N)$$

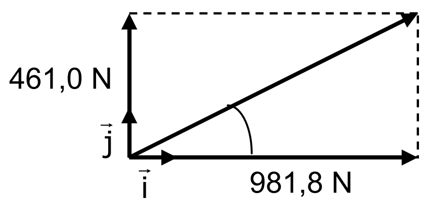
La fuerza resultante será:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 981,8\;\vec{i} + 461,0\;\vec{j}$$

Módulo:

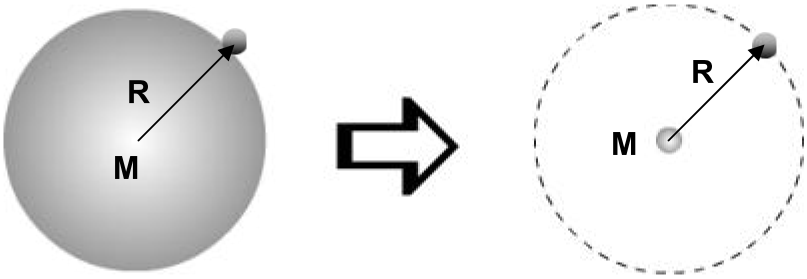
$$\vec{F} = 981,8\;\vec{i} + 461,0\;\vec{j}$$
$$F = \sqrt{981,8^2 + 461,0^2}\;\;N = 1\,084,6\;N$$

Ángulo formado con el eje X



$$tg\,\alpha = \frac{461,0}{981,8} = 0,4695\;;\;\alpha = 25,2^0$$

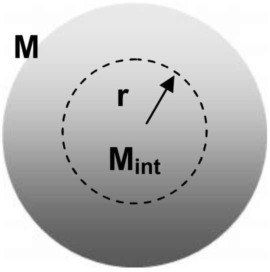
Cuando se consideran masa extensas, éstas se comportan como si la totalidad de la masa se concentrara en su centro. Esto es, podemos considerar toda la masa concentrada en un punto (de radio nulo) situado en su centro (masa puntual). Por esta razón las distancias hay que tomarlas siempre desde el centro de las masas:



La fuerza ejercida por una masa extensa sobre un objeto situado en su superficie es la misma que si consideramos una masa puntual situada en su centro en la que se concentra la totalidad de la masa.

$$F = G\,\frac{m\,M}{R^2}$$

Por esta razón si nos situamos en el interior de la esfera a una distancia r del centro (siendo r<R), la única masa que ejerce atracción es la situada en la esfera de radio r. Por tanto, la fuerza con que un objeto es atraído disminuye a medida que descendemos hacia el interior, anulándose en el centro (r =0).

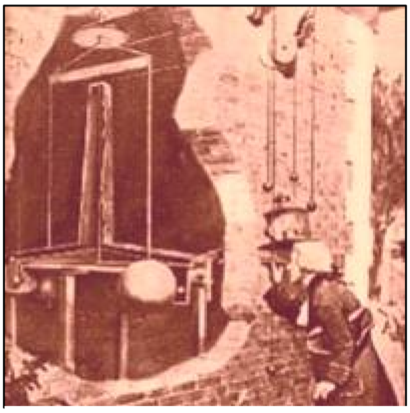


Si por el contrario vamos desde el centro hacia el exterior la gravedad aumenta hasta adquirir su valor máximo en la superficie y, a partir de ahí, comienza a disminuir.

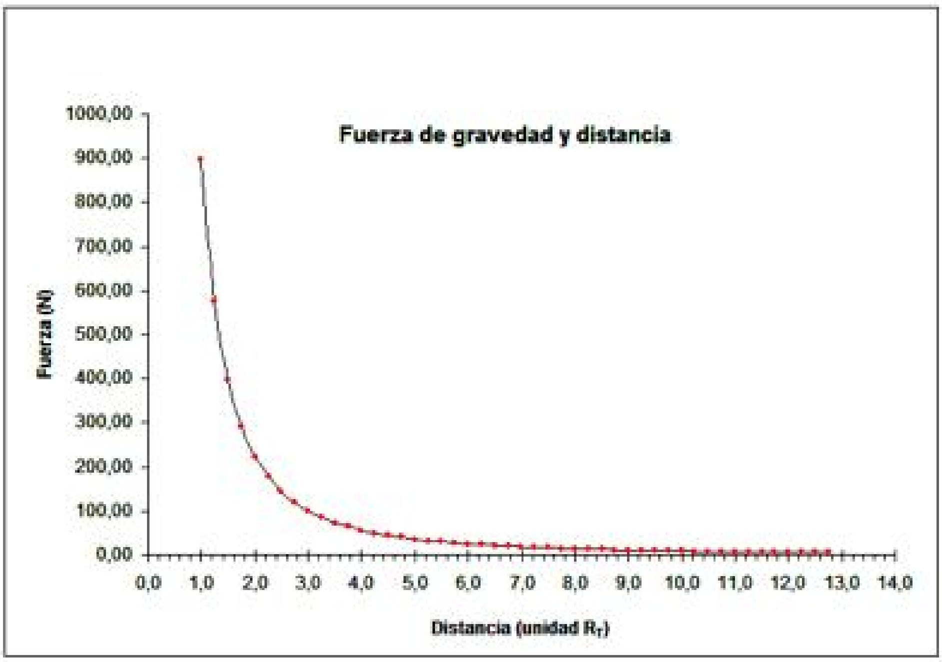
Debido a que la fuerza de gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, su valor decae muy rápidamente al alejarse de la masa responsable de la atracción.

La gráfica de más abajo muestra el valor de la fuerza de gravedad creada por el planeta Tierra sobre una masa de 100 kg situada inicialmente en su superficie ($d = R_T$) y cómo varía cuando el objeto se va alejando.

Como se puede ver si nos alejamos a una distancia de unos 10 radios terrestres la fuerza de gravedad se hace prácticamente nula. Realmente no se anula nunca, ya que tiende asintóticamente a cero al aumentar la distancia.



Grabado en el que se muestra a Cavendish realizando un experimento con la balanza de torsión



La constante de gravitación universal, G, no fue determinada por Newton y su valor permaneció desconocido durante mucho tiempo.

Henry Cavendish (1731-1810) realizó un experimento (cuyos resultados hizo públicos en 1798) con el fin de determinar la densidad de la Tierra utilizando para ello una balanza de torsión (ideada por su amigo el reverendo John Michell y que se puede observar en el grabado de la izquierda). Entonces no se concedía a G el carácter de constante universal que se le da hoy día, ni la importancia que hoy le concedemos ya que a efectos prácticos su valor se consideraba incluido en el de la masa de la Tierra.

El valor obtenido por Cavendish para la densidad de la Tierra fue de 5,45 g/cm^3 y sirvió a mediados del s. XIX para determinar el valor de G.

Una de las primeras referencias conocidas de la constante de gravitación es de 1873.

Ejemplo 4

Obtener el valor de la constante de gravitación, G, a partir de los datos siguientes:

$g = 9{,}81$ m/s^2 ; R_{Tierra}= 6,37 10^3 km ; d_{Tierra}= 5,45 g/cm^3

Solución:

Teniendo en cuenta que llamamos peso a la fuerza con que la Tierra trae a los cuerpo, y suponiendo que el objeto esté situado en la superficie de la Tierra (a una distancia R_T de su centro), podremos igualar las expresiones siguientes:

$$P = m\,g\;;\;\; F = G\,\frac{M_T\,m}{R_T^2}$$

$$\cancel{m}\,g = G\,\frac{M_T\,\cancel{m}}{R_T^2}\;;\; g = G\,\frac{M_T}{R_T^2}\;;\; G = \frac{gR_T^2}{M_T}\quad (1)$$

$$\text{Como}: d_T = \frac{M_T}{V_T}\quad y\quad V_T = \frac{4}{3}\pi\,R_T^3$$

$$M_T = d_T V_T = d_T\,\frac{4}{3}\pi\,R_T^3\quad \text{Sustituyendo en (1)}$$

$$G = \frac{gR_T^2}{M_T} = \frac{gR_T^2}{d_T\,\frac{4}{3}\pi\,R_T^3} = \frac{3g}{4\pi R_T d_T}$$

$$G = \frac{3g}{4\pi R_T d_T} = \frac{3.\,9{,}81\frac{m}{s^2}}{4\pi\;6{,}37\;10^6 m\;5{,}45\;10^3\,\frac{kg}{m^3}} = 6{,}75\;10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\;s^2}$$

La masa es una propiedad general de la materia. Según la segunda ley de Newton es una medida de la inercia del cuerpo o de la resistencia que éste opone a variar su velocidad, por eso la masa que aparece en las ecuaciones de la dinámica recibe el nombre de ***"masa inercial".***

De la expresión de la Ley de Gravitación Universal se desprende que debido a su masa los cuerpos se atraen. Por eso la masa que aparece en la expresión recibe el nombre de ***"masa gravitacional"***.

¿Son iguales la masa inercial y la gravitacional? Todos los experimentos realizados con el fin de determinar alguna diferencia han resultado negativos, por lo que se considera que ambas masas son idénticas. Precisamente la igualdad de ambas masas dio a A. Einstein la pista definitiva para elaborar la Teoría General de la Relatividad.

Ley de Gravitación y órbitas

La ley de Gravitación Universal permite conocer ***la causa*** por la cual los planetas orbitan alrededor del Sol con el movimiento descrito por las leyes de Kepler.

- El propio Newton demostró que cuando un cuerpo se mueve en torno a otro en una trayectoria cerrada, y sometido a una fuerza de atracción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa, ***describe una elipse en la que el cuerpo que atrae está situado en uno de los focos. (Primera Ley de Kepler)***
- Si la fuerza que mantiene a un objeto en órbita alrededor de otro es central, se puede demostrar (ver apuntes sobre momento angular) que el vector momento angular permanece invariable (esto es permanece constante en módulo, dirección y sentido), lo que implica que ***la trayectoria seguida será plana***, tal y como se observa en las órbitas de los planetas.
- La constancia del momento angular (debida a la existencia de una fuerza atractiva y central) lleva a la conclusión de que ***la velocidad areolar de los planetas es constante (Segunda Ley de Kepler) (***ver apuntes sobre momento angular para un mayor detalle).

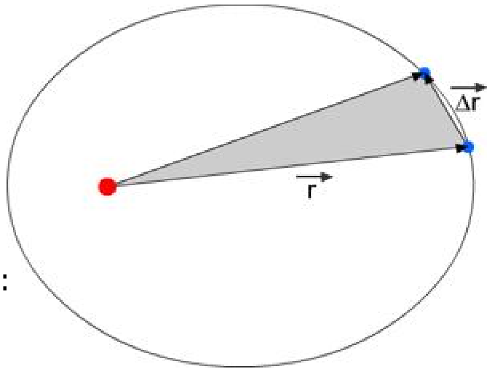
$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge \overrightarrow{\Delta r}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge \vec{v}\, t\right| = \frac{1}{2\,m}\left|\vec{r} \wedge m\,\vec{v}\right| t = \frac{1}{2\,m} L\, t$$

Por tanto:

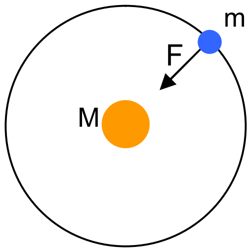
$$A = \frac{1}{2\,m} L\, t\,; \quad \boxed{\frac{A}{t} = \frac{L}{2\,m}}$$

Como L es constante, ya que la fuerza es central:

$$v_A = \frac{A}{t} = cte$$



- Si la fuerza que el Sol ejerce sobre los planetas es la propuesta por Newton, y consideramos que la órbita es circular (lo cual simplifica los cálculos y, como se ha visto, no está lejos de la realidad), obtenemos:



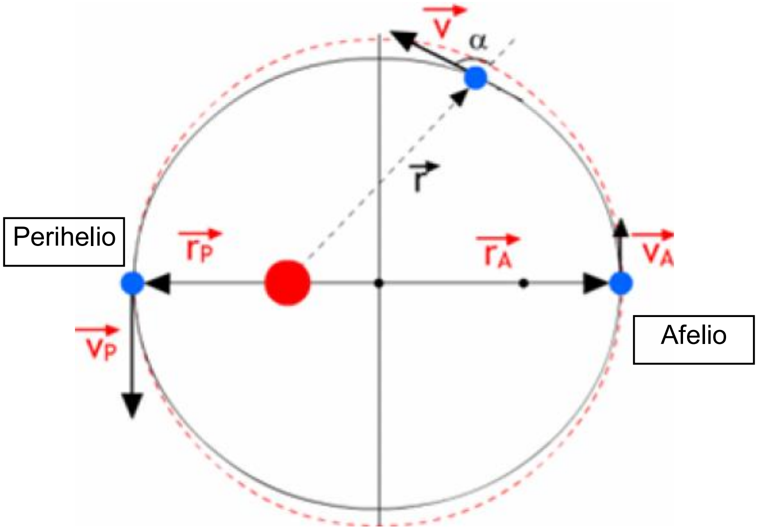
$$\left.\begin{array}{l} F_c = m\, a_N = m\,\omega^2 d \\ F = G\dfrac{m\,M}{d^2} \end{array}\right\} \cancel{m}\,\omega^2\, d = G\frac{\cancel{m}\,M}{d^2}; \quad \frac{(2\pi)^2}{T^2} d^3 = G\,M; \quad T^2 = \frac{4\,\pi^2\, d^3}{G\,M}; \quad T^2 = \left(\frac{4\,\pi^2}{G\,M}\right) d^3$$

Llegamos a la expresión matemática de la ***Tercera Ley de Kepler*** que surge (como las dos anteriores) de la existencia de una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Además, se concluye que el valor de la constante depende de la masa del astro central. Para el Sistema Solar su valor será (introduciendo la masa del Sol):

$$k = \frac{4\,\pi^2}{G\,M} = \frac{4\,\pi^2}{6{,}67\,10^{-11}\,\dfrac{m^3}{\cancel{kg}\,s^2}\,1{,}98\,10^{30}\,\cancel{kg}} = 2{,}99\,10^{-19}\,\frac{s^2}{m^3}$$

- Como en los puntos de máxima aproximación del planeta al Sol (***perihelio***) o de máximo alejamiento (***afelio***) el radio vector y la velocidad del planeta forman un ángulo de 90^0 podemos escribir:



$$L = r\,m\,v\,\operatorname{sen}\alpha$$

$$L = r\,m\,v$$
$$L_A = r_A m v_A$$
$$L_P = r_P m v_P$$
Como $L = cte$:
$$L_A = L_P\ ;\ r_A \cancel{m} v_A = r_P \cancel{m} v_P$$
$$\boxed{r_A v_A = r_P v_P}$$

Velocidad del planeta y distancia al Sol son inversamente proporcionales en esos puntos. La velocidad del planeta es máxima en el perihelio y mínima en el afelio

- Si suponemos una órbita circular (lo cual no está muy alejado de la realidad) podemos combinar la Ley de Gravitación Universal con la dinámica del movimiento circular para obtener, por ejemplo, la ***aceleración centrípeta*** de la Tierra debida a su movimiento de traslación alrededor del Sol o su ***velocidad orbital.***

Datos: Masa del Sol: $1{,}98\ 10^{30}$ kg
Distancia (media) Tierra – Sol : $1{,}5\ 10^{8}$ km

$$\left.\begin{aligned} F_c &= m\,a_N \\ F &= G\frac{m\,M}{d^2}\end{aligned}\right\}\quad \cancel{m}\,a_N = G\frac{\cancel{m}\,M}{d^2}\ ;\quad \boxed{a_N = G\frac{M}{d^2}}$$

$$a_N = G\frac{M}{d^2} = 6{,}67\,10^{-11}\frac{m^3}{\cancel{kg}\,s^2}\frac{1{,}98\,10^{30}\,\cancel{kg}}{\left(1{,}5\,10^{11}\right)^2 m^2} = 5{,}87\,10^{-3}\frac{m}{s^2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_N &= G\frac{M}{d^2} \\ a_N &= \frac{v^2}{d}\end{aligned}\right\}\quad \frac{v^2}{d} = G\frac{M}{d^2}\ ;\quad \boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M}{d}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{G\,M}{d}} = \sqrt{\frac{6{,}67\,10^{-11}\frac{\cancel{m^3}^{\,2}}{\cancel{kg}\,s^2}\ 1{,}98\,10^{30}\,\cancel{kg}}{1{,}5\,10^{11}\,\cancel{m}}} = 29\,672\,\frac{m}{s} = 29{,}7\,\frac{km}{s} = 106\,920\,\frac{km}{h}$$

Ejemplo 5

Io es una de las sesenta y tres lunas de Júpiter (la más próxima al planeta) y tiene un periodo orbital de 1 día 18 h y 28 min. ¿Cuál es la distancia media entre Ío y Júpiter?

DATOS: Masa de Júpiter: $1{,}90.10^{27}$ kg

Solución:

Expresamos el periodo orbital en segundos: 1 día 18 h y 28 min = 152 880 s

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k\, r^3$ y despejamos la incógnita (r): $r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}}$

Hay que tener en cuenta que el astro central alrededor del cual orbita Ío es Júpiter, no el Sol. Por ***tanto deberemos determinar el valor de k para este caso sustituyendo la masa de Júpiter*** en la expresión que nos da la constante de Kepler (ver más arriba)

$$k = \frac{4\,\pi^2}{G\,M} = \frac{4\,\pi^2}{6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^3}{\cancel{kg}\,s^2}\,1{,}90\,10^{27}\,\cancel{kg}} = 3{,}12\,10^{-16}\,\frac{s^2}{m^3}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{\left(1{,}53.10^5\right)^2\,\cancel{s^2}}{3{,}12.10^{-16}\,\frac{\cancel{s^2}}{m^3}}} = 4{,}22.10^8\,m = 4{,}22.10^5\,km = 422\,000\ km$$

NOTA: El radio orbital medio de Io alrededor de Júpiter se estima en 421 600 km

- ***La masa del astro central se puede estimar a partir de la observación de algún objeto que orbite alrededor suyo.*** De esta manera es relativamente sencillo estimar la masa de los planetas que tienen satélites. En el caso de los planetas que no poseen lunas (Mercurio o Venus) la determinación de su masa es más complicada.

Ejemplo 6

Titán es una luna de Saturno que orbita alrededor del planeta con un periodo de $1{,}37.10^6$ s y a una distancia media de $1{,}30.10^9$ m. ¿Cuál es la masa de Saturno?

Solución:

Partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k\, r^3$ y sustituimos el valor de k : $T^2 = \left(\frac{4\,\pi^2}{G\,M}\right) r^3$

Despejando la masa del astro central (Saturno) y sustituyendo datos:

$$M = \frac{4\,\pi^2}{G}\,\frac{r^3}{T^2} = \frac{4\,\pi^2}{6{,}67\,10^{-11}\,\frac{\cancel{m^3}}{kg\,\cancel{s^2}}}\,\frac{\left(1{,}30\,10^9\right)^3\,\cancel{m^3}}{\left(1{,}37\,10^6\right)^2\,\cancel{s^2}} = 6{,}93\,10^{26}\,kg$$

Ejemplo 7

En la tabla que se muestra a la derecha se dan los valores de algunos parámetros de la órbita de la Tierra. Completar las celdas vacías.

Parámetros	Valores
Distancia perihelio	147 055 091 km
Distancia afelio	152 141 431 km
Velocidad afelio	$2{,}92\ 10^4$ m/s
Velocidad perihelio	
Excentricidad	0,017
Semieje mayor	149 598 261
Semieje menor	
Distancia focal	

Solución:

La velocidad en el perihelio se puede calcular haciendo uso de la constancia del momento angular:

$$r_A v_A = r_P V_P$$

$$V_P = \frac{r_A}{r_P}\,v_A = \frac{152\,141\,431\,\cancel{km}}{147\,055\,091\,\cancel{km}}\,2{,}92\,10^4\,\frac{m}{s} = 3{,}02\,10^4\,\frac{m}{s}$$

La velocidad en el perihelio es un 3,4 % mayor.

Para calcular el valor del semieje menor y la distancia focal hacemos uso de la expresión de la excentricidad de una elipse:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$c = \varepsilon\, a = 0{,}017.\ 149\ 598\ 261\ \text{ km} = 2\ 543\ 170\ \text{km}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\ ;\ \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}\ ;\ \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$$

$$b = a\sqrt{(1 - \varepsilon^2)} = 149\ 598\ 261\ \text{ km}\sqrt{(1 - 0{,}017^2)} = 149\ 576\ 643\ \text{km}$$

La diferencia entre el semieje mayor y el menor de la órbita terrestre es, por tanto, de 21 618 km. El semieje menor es un 0,01445% más corto que el mayor, lo que vuelve a confirmar lo próxima que está la órbita terrestre a un círculo.

- ***Órbita geoestacionaria***

Si se desea que un satélite orbite alrededor de un planeta de forma tal que esté siempre colocado sobre el mismo punto (lo que se emplea en el caso de satélites de comunicaciones, metereológicos u otros) es necesario que una vez colocado en posición gire con idéntico periodo que el de rotación de la Tierra (24 h). Para que esto suceda deberá situarse a una distancia de la Tierra (medida desde su centro) dada por:

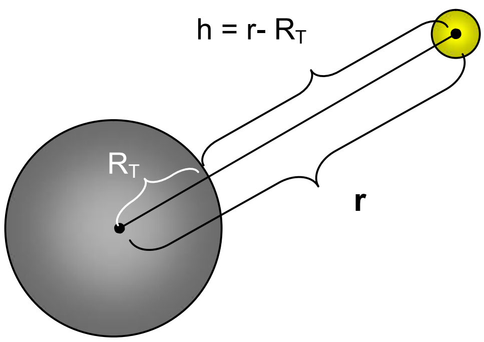
$$T^2 = \left(\frac{4\,\pi^2}{G\,M_T}\right) r^3\ ;\ T^2 = k_T\, r^3$$

$$\text{Donde: } k_T = \frac{4\,\pi^2}{G\,M_T} = \frac{4\,\pi^2}{6{,}67 10^{-11}\ \frac{m^3}{\cancel{kg}\ s^2}\ 5{,}97 10^{24}\ \cancel{kg}} = 9{,}91.\ 10^{-14}\ \frac{s^2}{m^3}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k_T}} = \sqrt[3]{\frac{(86\ 400)^2\ \cancel{s^2}}{9{,}91.\ 10^{-14}\ \frac{\cancel{s^2}}{m^3}}} = 42\ 232\ 927\ \text{m} = 42\ 233\ \text{km}$$

Para saber la altura, medida desde la superficie de la Tierra, restamos el radio terrestre:

$h = r - R_T$ = 42 233- 6370 km = 35 863 km



NOTA. Las órbitas geoestacionarias se sitúan a unos 35.786 km sobre el ecuador, lo que coincide con el resultado obtenido en el cálculo.

- ***Cañon de Newton.*** El propio Newton llegó a la conclusión de que las órbitas podían ser consideradas como verdaderas "caídas libres" del objeto que orbita.

  En la figura se muestra un hipotético cañón que dispara una bala. Las trayectorias A y B representan parábolas que acaban en la superficie de la Tierra. Sin embargo, si aumentamos suficientemente la velocidad con que se dispara la bala, llegará un momento en que su trayectoria no intersectará la superficie terrestre. Como además el objeto está sometida a la fuerza de atracción central (que apunta hacia el centro del planeta) su trayectoria se curvará convirtiéndose en un satélite. Continúa "cayendo" sobre el planeta en una caída sin fin.

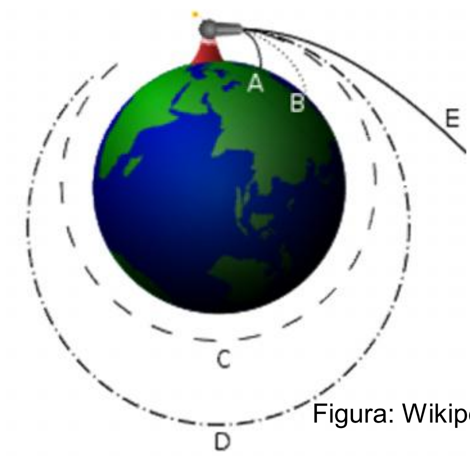
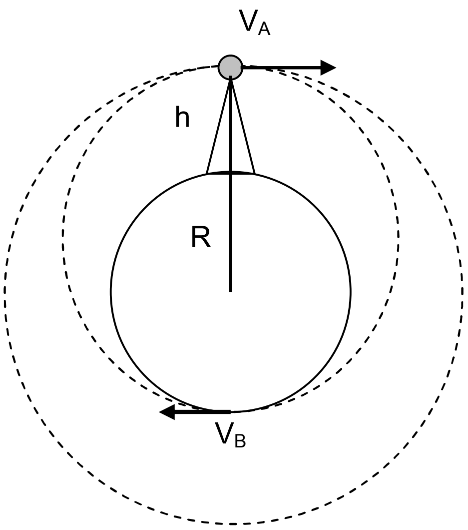


Figura: Wikipedia

  En función de la velocidad dada inicialmente la órbita puede ser una circunferencia, una elipse o, incluso, convertirse en una trayectoria abierta (trayectoria E) en la que el objeto se aleja indefinidamente del planeta venciendo la atracción gravitatoria de éste.



Como la fuerza que actúa sobre el objeto en órbita es central se conservará el momento angular. En consecuencia podemos poner para los puntos A y B:

$$\left.\begin{aligned} v_A\ r_A &= v_B\ r_B \\ r_A &= R + h \end{aligned}\right\} v_A\ (R+h) = v_B\ r_B$$

En el punto B :

$$F_N = m\ a_N = m\ \frac{v_B^2}{r_B}$$

$$\frac{G\,M}{r_B^2} = \frac{v_B^2}{r_B}\ ;\ \frac{G\ M}{r_B} = v_B^2$$

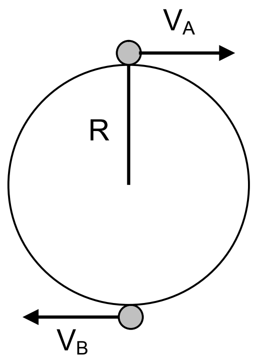
$$v_B = \sqrt{\frac{G\ M}{r_B}}$$

Por tanto :

$$V_A\ (R+h) = \sqrt{\frac{G\,M}{r_B}}\ r_B = \sqrt{G\,M\,r_B}$$

$$V_A\ (R+h) = \sqrt{G\,M\,r_B}$$

Imaginémonos ahora que el disparo se efectúa desde la superficie (h =0). ¿Cuál ha de ser la velocidad mínima necesaria para que el objeto quede en órbita alrededor de la Tierra? (consideramos nulo el rozamiento con el aire)



$$V_A\ (R+h) = \sqrt{G\,M\,r_B}$$

Ahora :

$$h = 0\ ;\ r_B = R$$

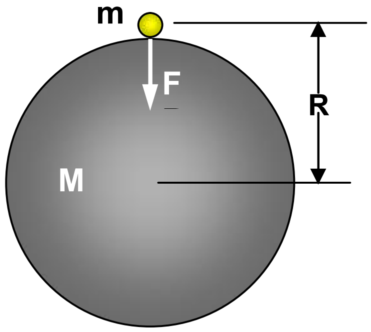
$$V_A\ R = \sqrt{G\,M\,R}$$

$$V_A = \sqrt{\frac{G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{6,67\ 10^{-11}\ \frac{m^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{kg}\ s^2}\ 5,98\ 10^{24}\ \cancel{kg}}{6,37\ 10^6\ \cancel{m}}} = 7913\ \frac{m}{s} = 7,91\ \frac{km}{s} = 28\ 487\ \frac{km}{h}$$

NOTA: Para comunicar esa velocidad a un objeto de 10 kg sería necesario transferirle una cantidad de energía equivalente a la liberada en la explosión de 100 kg de TNT (recordar que se supone nulo el rozamiento con el aire)

Ley de Gravitación y aceleración de la gravedad

Llamamos peso a la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo situado en su superficie.



$$P = F = G\,\frac{m\;M}{R^2}$$

La expresión anterior se puede escribir en la forma: $P = m\left(\frac{G\;M}{R^2}\right)$

La expresión encerrada entre paréntesis depende únicamente de datos propios del astro considerado, tales como su masa o su radio y se corresponde con la aceleración de la gravedad, g.

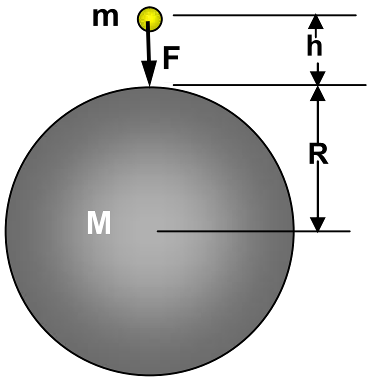
$$\boxed{g = G\,\frac{M}{R^2}}$$

Para la Tierra (M = 5,97 10 ^{24} kg y R = 6,37 10 ^{6} m): $g = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}\,s^2}\,\frac{5{,}97\,10^{24}\,\cancel{kg}}{\left(6{,}37\,10^{6}\right)^2\,\cancel{m^2}} = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

Por tanto, podemos escribir: **P = m g**

El valor de g no es constante en todo el planeta ya que prescindiendo de otros efectos (la rotación influye) el radio de la tierra en el Ecuador es mayor que en los Polos, por tanto $g_{\text{Ecuad}} < g_{\text{Polos}}$.

Si nos alejamos de la superficie terrestre el valor de la gravedad también variará ya que entonces deberíamos escribir:



$$P = F = G\,\frac{m\,M}{(R+h)^2} = m\left(G\,\frac{M}{(R+h)^2}\right)$$

$$g = G\,\frac{M}{(R+h)^2} = G\,\frac{M}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

Donde: $g_0 = G\,\frac{M}{R^2}$ (valor de g en la superficie)

Así para h = 360 km, tenemos:

$$g = G\,\frac{M}{(R+h)^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}\,s^2}\,\frac{6{,}0\,10^{24}\,\cancel{kg}}{\left(6{,}4\,10^{6}+3{,}6\,10^{5}\right)^2\,\cancel{m^2}} = 8{,}76\,\frac{m}{s^2}$$

El valor de la gravedad a 360 km sobre la superficie terrestre es menor que sobre ésta, pero sólo un 10,7% más pequeña. A esta distancia es a la que está situada la Estación Espacial Internacional (ISS), por tanto, y según nuestros cálculos, los astronautas que viven en ella deberían estar sometidos a una gravedad algo menor que la correspondiente a nuestro planeta, pero no deberían estar en estado de ingravidez, tal y como estamos acostumbrados a ver ¿qué ocurre?

Ejemplo 8

Calcular el valor de la gravedad en Mercurio sabiendo que tiene una radio de 2 440 km y una masa de 3,30 10^{23} kg

Solución:

El valor de la gravedad en un planeta depende de su masa y radio y se puede calcular a partir de la expresión (ver más arriba):

$$g = G\,\frac{M}{R^2}$$

Sustituyendo los datos y operando:

$$g = G\,\frac{M}{R^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}\,s^2}\,\frac{3{,}30\,10^{23}\,\cancel{kg}}{\left(2{,}44\,10^{6}\right)^2\,\cancel{m^2}} = 3{,}70\,\frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 9

El valor de la gravedad varía si nos alejamos de la superficie terrestre. Calcular a qué altura deberemos situarnos de la superficie de la Tierra para que g = 5 m/s^2

Masa de la Tierra: 6,0.10^{24} kg. Radio de la Tierra: 6 400 km.

Solución:

El valor de la gravedad para un punto situado a una altura h sobre la superficie terrestre viene dado por:

$$g = G\,\frac{M}{\left(R+h\right)^2}$$

$$\left(R+h\right)^2 = G\,\frac{M}{g} = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{kg}\,\cancel{s^2}}\,\frac{6{,}0\,10^{24}\,\cancel{kg}}{5\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}} = 8{,}0\,10^{13}\,m^2$$

$$\left(R+h\right)^2 = 8{,}0\,10^{13}\,m^2\,;\,R+h = \sqrt{8{,}0\,10^{13}\,m^2} = 8{,}94\,10^{6}\,m = 8{,}94\,10^{3}\,km = 8\,940\,km$$

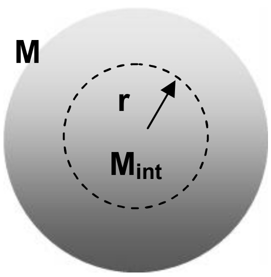
$$R+h = 8\,940\,km\ ;\ h = 8\,940 - R;\ h = 8\,940\,km - 6\,400\,km = 2\,540\,km$$

Ejemplo 10

Calcular el valor de la aceleración de la gravedad en un punto de la Tierra, interior a ella y situado a 2 500 km de su centro, suponiendo que tiene una densidad constante.

$g_{superficie}$= 9,81 m/s^2 ; R_{Tierra}= 6 370 km

Solución:



$$g = G\,\frac{M_{int}}{r^2}$$

Para calcular la gravedad ***hay que considerar sólo la masa de la esfera interior al punto considerado***. Para determinarla hacemos uso del concepto de densidad.

$$d = \frac{m}{V}; \quad m = V\,d$$

$$V_{TOTAL} = \frac{4}{3}\pi R^3; \; M_{TOTAL} = \frac{4}{3}\pi R^3\; d$$

$$V_{Int} = \frac{4}{3}\pi r^3; \; M_{Int} = \frac{4}{3}\pi r^3\; d$$

Dividiendo :

$$\frac{M_{Int}}{M_{TOTAL}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\; d}{\frac{4}{3}\pi R^3\; d} = \frac{r^3}{R^3}; \quad M_{Int} = M_{TOTAL}\frac{r^3}{R^3}$$

Luego:

$$g = G\,\frac{M_{Int}}{r^2} = G\,\frac{M_{TOTAL}\frac{r^3}{R^3}}{r^2} = G\frac{M_{TOTAL}}{R^3}\,r$$

$$g = G\frac{M_{TOTAL}}{R^2}\frac{r}{R} = g_0\,\frac{r}{R} = 9{,}81\frac{m}{s^2}\;\frac{2\,500\;\cancel{km}}{6\,370\;\cancel{km}} = 3{,}85\frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 11

Calcular el periodo de traslación de la Luna alrededor de la Tierra tal y como lo dedujo Newton. Esto es, a partir de los datos siguientes:

$g_{\ Tierra}$= 9,81 m/s^2 ; R_{Tierra}= 6 370 km ; Distancia Tierra - Luna r = 60 R_T

Solución:

Partamos de la expresión de la 3ª ley de Kepler: $T^2 = \left(\frac{4\,\pi^2}{G\,M_T}\right) r^3$

Como: $g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2}$ podemos multiplicar y dividir el denominador de la constante de Kepler por el cuadrado del radio terrestre.

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{R_T^2\left(\frac{G\,M_T}{R_T^2}\right)}\,r^3 = \frac{4\,\pi^2}{R_T^2\;g_T}\,r^3$$

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{R_T^2\;g_T}\left(60\,R_T\right)^3 = \frac{4\,\pi^2}{g_T}\,60^3\;R_T$$

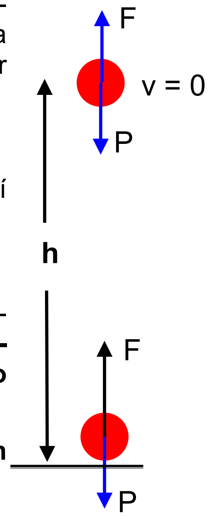
$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2\;60^3}{g_T}\,R_T} = \sqrt{\frac{4\,\pi^2\;60^3}{9{,}81\,\frac{\cancel{m}}{s^2}}\,6{,}37\,10^6\;\cancel{m}} = 2\,353\,108\;s$$

$$2\,353\,108\;\cancel{s}\;\frac{1\;\cancel{h}}{3\,600\;\cancel{s}}\;\frac{1\,\text{día}}{24\;\cancel{h}} = 27{,}2\;\text{días}$$

NOTA: El periodo de revolución de la Luna encontrado en la bibliografía es de 27, 3122 días.

INTERACCIÓN GRAVITATORIA

LA FUERZA DE GRAVEDAD COMO FUERZA CONSERVATIVA



Cuando elevamos un cuerpo una altura ***h***, ***tal que podamos suponer invariable el valor de g***, la fuerza ***F*** realiza trabajo positivo (comunica energía cinética al cuerpo). No podríamos aplicar la definición de trabajo que conocemos para calcular la energía transferida, ya que la fuerza no es constante (deberá de ser mayor que el peso al principio para poner el cuerpo en movimiento y después, al final del trayecto, deberá hacerse menor para frenar).

Supongamos que realiza un trabajo W_F (desconocido).

El peso ***P*** realiza trabajo negativo (quita energía cinética al cuerpo), pero como el peso sí es una fuerza constante podemos calcular el trabajo realizado:

$$\mathbf{Wp = - P \cdot h = - m\, g\, h}$$

La situación es similar a la encontrada en el caso de la fuerza de rozamiento. Sin embargo, en este caso, existe una diferencia fundamental: l**a energía cinética quitada al cuerpo no se transforma en calor (como en el caso de la fuerza de rozamiento), sino que se acumula como un nuevo tipo de energía llamada *energía potencial*.**

La fuerza de gravedad, al realizar trabajo negativo, transforma la energía cinética en energía potencial.

Arriba el cuerpo tiene energía “en potencia” (energía potencial), ya que si se le suelta adquiere energía cinética. **La energía potencial acumulada durante el ascenso se transforma ahora en energía cinética.**

La fuerza de gravedad, al realizar trabajo positivo, transforma energía potencial en cinética.

Las fuerzas (como la gravedad o las fuerzas elásticas) que cuando quitan energía cinética al cuerpo no la transforman en calor (irrecuperable), sino que ***la transforman en energía potencial***, que puede transformarse nuevamente en cinética si se deja a la fuerza actuar libremente sobre el cuerpo, reciben el nombre de **fuerzas conservativas.**

Siempre que una fuerza conservativa realice trabajo negativo, restará energía cinética al cuerpo, que aparecerá como energía potencial: la energía cinética disminuirá y aumentará la potencial

Si realiza trabajo positivo la energía potencial se transforma en energía cinética: la energía potencial disminuye y aumenta la cinética.

Por tanto, en el caso de fuerzas conservativas, se puede calcular el trabajo realizado calculando la variación de energía potencial:

$$\mathbf{W_{cons} = - (Ep_2 - Ep_1) = - \Delta E_P}$$

Al final, cuando el cuerpo se encuentra a una altura h, su energía cinética es nula. Por tanto, toda la energía cinética dada por la fuerza F (igual a W_F) ha sido transformada por la fuerza de gravedad en energía potencial (Ley de Conservación de la Energía).

Por tanto: $W_F = Ep$

Para que la energía cinética al final sea nula (v = 0) deberá de cumplirse que toda la energía cinética dada por la fuerza F haya sido restada por la acción de la fuerza de gravedad. O lo que es lo mismo, la fuerza de gravedad realiza un trabajo (Wp) exactamente igual, pero de signo contrario, al de la fuerza F:

$$Wp = - W_F$$

Como $W_P = - m\, g\, h$, entonces $W_F = Ep = m\, g\, h$.

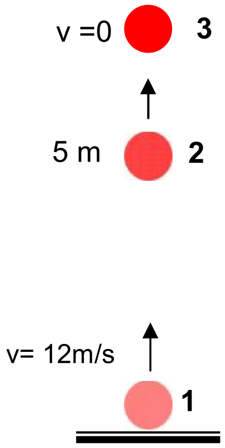
Por tanto la energía potencial gravitatoria puede calcularse (si suponemos g constante):

$$\mathbf{Ep = m\, g\, h}$$

Ejemplo 1

Un cuerpo de 500 g es lanzado hacia arriba con una velocidad de 12 m/s. Realiza un estudio energético de su recorrido.

Solución:



- Cuando se inicia el lanzamiento (punto 1) el cuerpo posee energía cinética (transferida por la fuerza aplicada durante el lanzamiento):

  $Ep_{(1)} = m\ g\ \ h_1 = 0$ (ya que h=0)

  $Ec_{(1)} = 1/2\ m\ v^2 = 1/2\ 0{,}5\ kg\ 12^2\ (m/s)^2 = 36\ J$

- ***A medida que el cuerpo asciende disminuye su energía cinética*** (debido a la acción de la fuerza de gravedad que realiza trabajo negativo). ***La energía cinética se transforma en energía potencial gravitatoria***. La fuerza de gravedad quita energía cinética al cuerpo que se transforma en energía potencial gravitatoria.

- Supongamos que estamos a una altura de 5 m (punto 2):

  $Ep_{(2)} = m\ g\ \ h_2 = 0{,}5\ kg\ 10\ m/s^2\ 5\ m = 25\ J$

  Como la energía no se destruye la energía cinética en ese punto sería:

  $Ec_{(2)} = 36\ J - 25\ J = 11\ J$

- ***Llegará un momento en el que la energía cinética sea nula (v =0). Esto ocurrirá en el punto de altura máxima (punto 3). Ahí toda la energía cinética se habrá convertido en potencial:***

$Ep_{(3)} = 36\ J$; $Ec_{(3)} = 0$

A partir del dato de energía potencial en el punto de altura máxima podemos calcular esta altura:

$$Ep_{(3)} = mgh_{MAX};\ h_{MAX} = \frac{Ep_{(3)}}{m\ g} = \frac{36\ \cancel{kg}\ m^{\cancel{2}}\ \cancel{s^{-2}}}{0{,}5\ \cancel{kg}\ 10\ \cancel{m}\ \cancel{s^{-2}}} = 7{,}2\ m$$

- ***Cuando el cuerpo comienza a descender la fuerza de gravedad (conservativa) realiza trabajo positivo, realizándose ahora la conversión de energía potencial en cinética*** (la fuerza de gravedad transfiere ahora energía cinética al cuerpo).

- ***Cuando llega al suelo toda la energía potencial se habrá transformado en cinética. Luego el cuerpo llega al suelo con la misma velocidad con la que fue lanzado inicialmente***.

En toda esta descripción se ha supuesto una situación ideal: el aire no ejerce ningún tipo de acción (fuerza) sobre el cuerpo. La realidad no es esa. Por eso cuando se lanza un objeto hacia arriba, regresa al suelo con menos velocidad que con la que fue lanzado.

Las fuerzas conservativas, por tanto, realizan una transferencia de energía cinética a potencial o viceversa. Como la energía no puede desaparecer debe cumplirse que aparece tanta energía potencial como energía cinética es restada al cuerpo. **Por tanto si la única fuerza que realiza trabajo es conservativa se cumple:**

$$\mathbf{E_{cin} + E_{pot} = cte.\ ;\ E_{c\,1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}}$$

La suma de la energía cinética y potencial permanece constante (se conserva). A la suma de la energía cinética y potencial se le da el nombre de energía mecánica.

Por tanto podremos decir que cuando la única fuerza que realiza trabajo es conservativa se conserva la energía mecánica.

Una característica muy importante de las fuerzas conservativas radica en que el trabajo realizado por ellas no depende del camino recorrido entre los puntos inicial y final.

Efectivamente:

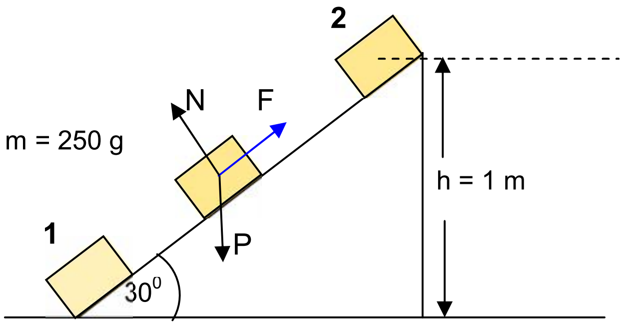
Para subir un cuerpo a una altura de 1 m podemos seguir dos caminos distintos:

Camino 1.

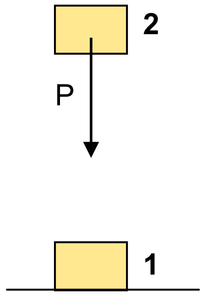
Utilizar un plano inclinado

Camino 2.

Subirlo en vertical

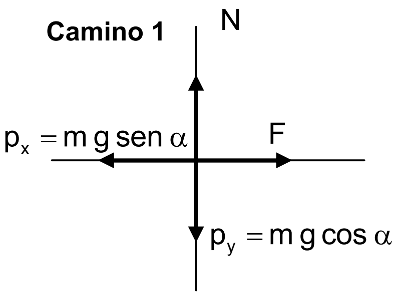


Camino 1



Camino 2

Camino 1



Las dos únicas fuerzas que realizan trabajo son F y la componente del peso paralela al plano (p_x). La normal y la componente del peso perpendicular no realizan trabajo, ya que forman un ángulo de 90^0 con la dirección del desplazamiento.

Si suponemos que en el punto1 el cuerpo está en reposo y en el punto 2, también: $Ec_{(1)} = Ec_{(2)} = 0$

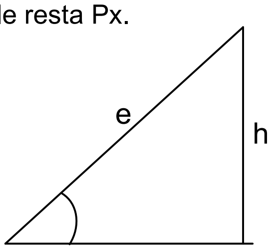
Como la fuerza realiza un trabajo positivo (transfiere energía al cuerpo), mientras que la componente del peso realiza un trabajo negativo (quita energía cinética al cuerpo), deberá de cumplirse:

$$W_F + W_{Px} = 0;\quad \mathbf{W_F = - W_{Px}}$$

Es decir, la energía aportada por F debe ser exactamente igual a la que le resta Px.

El trabajo realizado por Px vale: $Wp_x = -p_x\,.e = -(m\,g\,\text{sen}\alpha).\,e$

La altura **h** y el espacio recorrido **e** están relacionados según:



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{h}{e};\quad e = \frac{h}{\text{sen}\,\alpha}$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior, obtenemos:

$$Wp_x = -p_x\,.e = -(m\,g\,\text{sen}\alpha).\,e = -(m\,g\,\cancel{\text{sen}\alpha}).\frac{h}{\cancel{\text{sen}\alpha}} = -m\,g\,h$$

El peso es un fuerza conservativa y, como tal, transforma la energía cinética en potencial. Luego en el punto situado a una altura h en el plano el cuerpo tendrá una energía potencial:

$$Ep_{(2)} = m\,g\,h$$

- **Camino 2**

Si el cuerpo se eleva directamente, y en vertical, hasta la altura h (ver figura más arriba) podremos escribir siguiendo un razonamiento idéntico al caso anterior:

$$Ec_{(1)} = Ec_{(2)} = 0\,;\quad W_F + W_P = 0;\quad \mathbf{W_F = - W_P}$$

En este caso el trabajo del peso será: $\mathbf{W_P} = - m\,g\,h$

Y la energía potencial: $Ep_{(2)} = m\,g\,h$

La energía potencial debida a la acción de una fuerza conservativa sólo depende del punto inicial y del final y no del camino seguido entre ambos puntos.

Se dice que la energía potencial es una función de punto.

Expresión general de la energía potencial gravitatoria

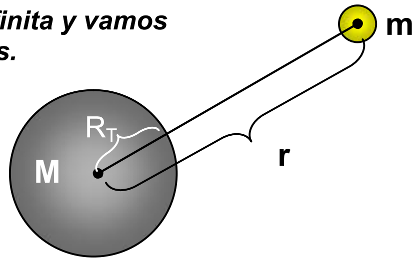
La expresión para la energía potencial gravitatoria ***Ep = m g h,*** es válida siempre que consideremos que el valor de g es constante. Esto es cierto siempre que no nos alejemos mucho de la superficie del planeta considerado (h no muy grande). En caso contrario (según se ha visto en el tema anterior) el valor de g disminuye ya que:

$$g=\frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

Para obtener una expresión general para la energía potencial ***el primer problema que hay que resolver es dónde tomar el valor cero.***

Es lógico pensar que ese punto estaría allí donde la fuerza de gravedad sea nula. Como el valor de la fuerza de gravedad tiende asintóticamente a cero a medida que crece la distancia, tendrá un valor nulo a una distancia infinita. ***La energía potencial gravitatoria será nula, por tanto, a distancia infinita (del centro de la masa)***

Si consideramos el valor cero de energía potencial a una distancia infinita y vamos acercándonos a la masa la energía potencial tomará valores negativos.

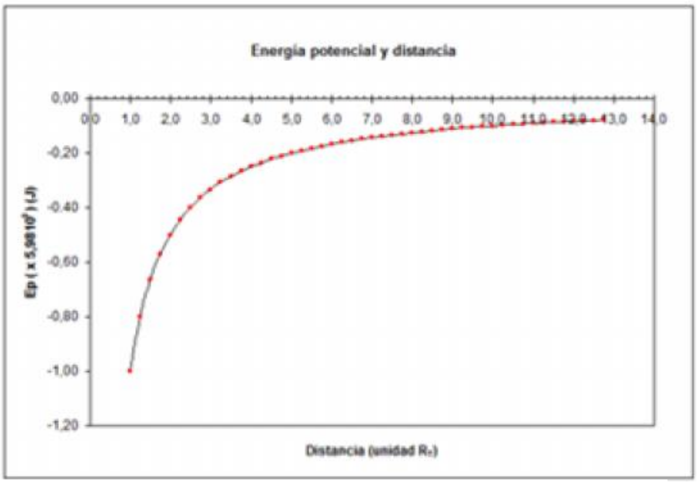


Aunque la deducción del valor de la energía potencial para estos casos está fuera del nivel exigido para este curso se puede demostrar que vale:

$$\boxed{Ep=-G\,\frac{m\,M}{r}}$$

Según lo dicho (ver gráfica) la energía potencial, por tanto:

- Será nula a una distancia infinita.
- A medida que nos acercamos a la Tierra (u otro planeta) toma valores cada vez más negativos. Esto es, disminuye a medida que nos aproximamos a la masa.
- Si nos situamos en la superficie de la Tierra ($r=R_T$) y comenzamos a alejarnos de la misma, la energía potencial toma valores cada vez menos negativos. Esto es, crece.



Gráfica Ep-distancia (medida en radios terrestres)

Si nos imaginamos que trasladamos una masa m desde un punto a distancia r_1 hasta otro a distancia r_2, (más alejado: $r_2>r_1$), tendremos:

$$W_{cons}=-\Delta E_p=-\left(Ep_2-Ep_1\right)=Ep_1-Ep_2$$

$$\left.\begin{aligned}Ep_1&=-G\,\frac{M\,m}{r_1}\\ Ep_2&=-G\,\frac{M\,m}{r_2}\end{aligned}\right\}Ep_1-Ep_2=-G\,\frac{M\,m}{r_1}+G\,\frac{M\,m}{r_2}$$

$$W_{cons}=G\,Mm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

$$\boxed{W_{cons}<0}$$

La fuerza de gravedad realiza trabajo negativo (resta energía al cuerpo). Por tanto, para separar un objeto (de masa m) de la masa central, M, habrá que suministrarle esa energía mediante la aplicación de una fuerza externa.

Si imaginamos que llevamos el cuerpo hasta el infinito:

$$W_{cons}=G\,M\,m\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\quad \text{Si}\ \ r_2=\infty\ ;\ W_{cons}=-G\,\frac{M\,m}{r_1}$$

El valor del trabajo realizado por la fuerza de gravedad coincide con el valor de la energía potencial en ese punto.

Se puede definir la energía potencial de una masa en un punto como el trabajo que realiza la fuerza de gravedad cuando se lleva la masa hasta el infinito*, *y es numéricamente igual a la energía que una fuerza externa ha de comunicar al cuerpo para llevarlo hasta una distancia infinita (fuera de la influencia de la masa que la atrae).

Ejemplo 2

Calcular la diferencia de energía potencial para un satélite de 1 000 kg de masa situado a una altura de 400 km sobre la superficie de la Tierra y cuando se sitúa en una órbita a 1 000 km

DATOS: M_{Tierra}: 6,0 10^{24} kg ; R_{Tierra}= 6,4 10^{6} m

Solución:

$$\left.\begin{aligned} Ep_1 &= -G\frac{M\,m}{r_1} \\ Ep_2 &= -G\frac{M\,m}{r_2} \end{aligned}\right\} \Delta Ep = Ep_2 - Ep_1 = -G\frac{M\,m}{r_2} + G\frac{M\,m}{r_1}$$

$$\Delta Ep = G\,M\,m\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = 6,67\ 10^{-11}\,\frac{m^3}{\cancel{kg}\ s^2}\,6,0\ 10^{24}\ \cancel{kg}\ 10^3\ kg\left(\frac{1}{6,8 10^6}-\frac{1}{7,4 10^6}\right)m^{-1} = 4,8\ 10^9\,J$$

Ejemplo 3 (Oviedo, 2008-09)

Se dispara hacia arriba un proyectil con una velocidad inicial de 8,0 km/s. Sabiendo que el radio de la Tierra es de 6 370 km y que la aceleración de la gravedad en su superficie es 9,80 m/s^2 determinar la altura máxima alcanzada respecto de la superficie.

Solución:

El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra (g_0) viene dado por la expresión:

$$g_0 = G\frac{M}{R_T^2}\ ;\ \ G\,M = g_0\ R_T^2$$

El proyectil disparado desde la superficie de la Tierra tendrá una energía total suma de la energía cinética y potencial gravitatoria:

$$E_{Tot} = Ec + Ep_1 = \frac{1}{2}\,mv^2 - G\,\frac{m\,M}{R_T}$$

Cuando alcance el punto de máxima altura v =0 y su energía potencial valdrá: $E_{p2} = -G\,\dfrac{m\,M}{r}$

Si suponemos que la suma de potencial y cinética se conserva (rozamiento con el aire, nulo):

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - G\,\frac{m\,M}{R_T} = -G\,\frac{m\,M}{r}\ ;\ r = -\frac{G\,\cancel{m}\,M}{\frac{1}{2}\,\cancel{m}v^2 - G\,\frac{\cancel{m}\,M}{R_T}} = \frac{G\,M}{G\frac{M}{R_T} - \frac{v^2}{2}}$$

$$r = -\frac{g_0 R_T^2}{\frac{g_0 R_T^{\cancel{2}}}{\cancel{R_T}} - \frac{v^2}{2}} = \frac{g_0 R_T^2}{g_0 R_T - \frac{v^2}{2}} = \frac{9,80\,\frac{m}{s^2}\left(6,37\ 10^6\right)^2 m^2}{9,80\,\frac{m}{s^2}\ 6,37\ 10^6 m - \frac{\left(8\ 10^3\right)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2}} = 13\ 069\ 533\ m$$

$$h = r - R_T = 13\ 070 - 6\ 370 = 6\ 700\ km$$

Energía y órbitas

Cuando un cuerpo orbita alrededor de otro, debido a la interacción gravitatoria entre ambos, posee una energía que es suma de la energía cinética y de la potencial:

$$E_{Tot} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$$

Si suponemos que la órbita es circular:

$$F_N = m\, a_N$$

$$G\frac{m\,M}{r^2} = m\frac{v^2}{r};\; G\frac{m\,M}{r} = mv^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{m\,M}{r}$$

Sustituyendo en la ecuación que da la energía total:

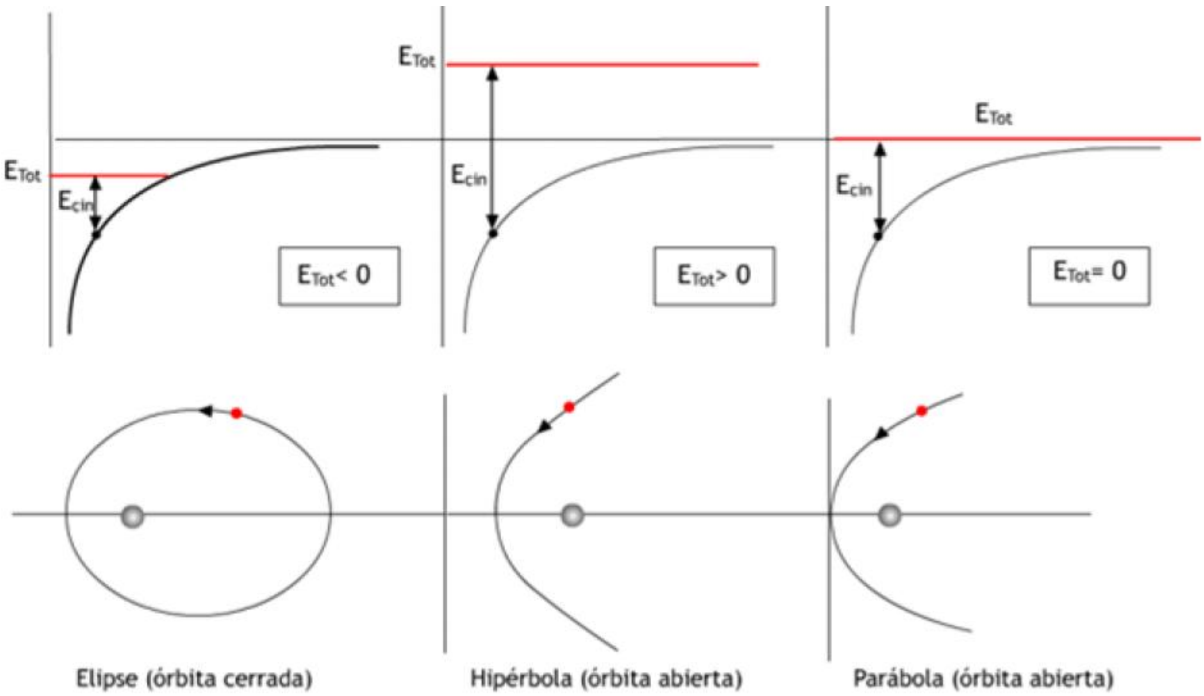
$$E_{Tot} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}G\frac{mM}{r} - G\frac{mM}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{mM}{r}$$

La energía total para una órbita circular es negativa y su valor es justamente la mitad de la energía potencial.

Este resultado se puede extender a las órbitas cerradas, como las elípticas. En ellas ***la energía total es siempre negativa***. El significado físico de ello es el siguiente: en una órbita cerrada el valor de la energía cinética siempre es inferior a la energía potencial. O lo que es lo mismo, el valor de la energía cinética no es suficiente para hacer que el objeto escape de la atracción gravitatoria de la masa central y permanece orbitando en torno a ella.

En el caso de que la energía total sea cero el cuerpo ya no queda ligado gravitatoriamente. Se aleja siguiendo una órbita abierta (parábola). En este caso la energía cinética sería la justa para que llegara al infinito (punto donde Ep =0) con una velocidad nula.

Si la energía total es positiva la energía cinética es suficiente para vencer la interacción gravitatoria y el cuerpo considerado se aleja del primero siguiendo una órbita abierta (hipérbola)



Izquierda: la energía total es negativa. La órbita es cerrada.
Centro: energía total positiva. Órbita abierta e hiperbólica.
Derecha: energía rotal nula. Órbita abierta y parabólica.

- La velocidad mínima para que un objeto orbite alrededor de la Tierra ($r = R_T$) será:

$$F_N = m\, a_N$$

$$\frac{G\,m\,M_T}{R_T^2} = m\frac{v_0^2}{R_T} \quad ; \quad \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T}}}$$

- La velocidad para que un objeto escape de la atracción gravitatoria de la Tierra ***(velocidad de escape)*** sería (ver más arriba):

$$E_{Tot}=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{mM_T}{R_T}=0$$

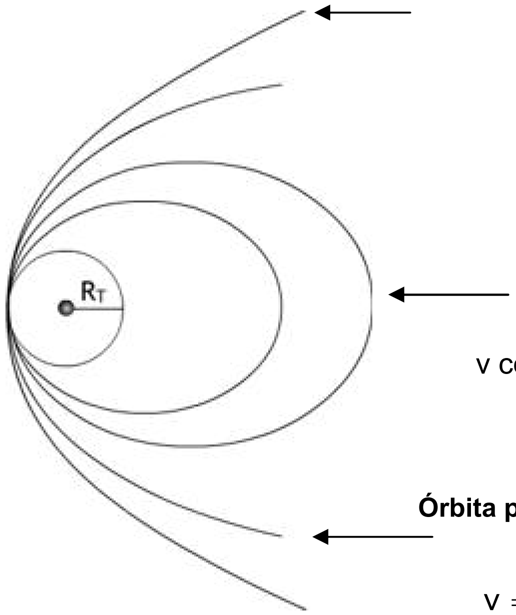
$$\boxed{v_e=\sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{R_T}}}$$

Se denomina velocidad de escape a la velocidad mínima con la que hay que lanzar un objeto desde un astro para que escape de su atracción.

Como puede observarse: $v_e=\sqrt{2}\;v_0$

Por tanto:

- Si $\boldsymbol{v = v_0}$ el cuerpo orbita siguiendo una órbita circular con la Tierra en cu centro.
- Si v es mayor que v_0 y menor que v_e ($\boldsymbol{v_0 < v < v_e}$) el cuerpo orbitará siguiendo órbitas elípticas con excentricidad creciente estando la Tierra en uno de los focos.
- Si $v=v_e=\sqrt{2}\;v_0$ el cuerpo escapará de la atracción gravitatoria de la masa central siguiendo una trayectoria parabólica. Velocidad nula en el infinito.
- Si $v>\sqrt{2}\;v_0$ el cuerpo también escapa de la atracción gravitatoria de la masa central, pero siguiendo ahora unta trayectoria hiperbólica. Su velocidad en el infinito no sería nula.



Órbita hiperbólica (abierta)

$\mathbf{E_{tot}=0}$

$v>\sqrt{2}\;v_0$

Órbitas cerradas

$\mathbf{E_{tot}<0}$

v comprendida entre v_0 y v_e

Órbita parabólica (abierta)

$\mathbf{E_{tot}>0}$

$v=v_e=\sqrt{2}\;v_0$

Ejemplo 4

Calcular la velocidad de escape para Mercurio, la Tierra y Marte. Comparar y sacar conclusiones.

DATOS: $M_{Mercurio}$: 0,0553 M_T ; $R_{Mercurio}$= 2 439 km

M_{Tierra}: 5,97 10^{24} kg ; R_{Tierra}= 6 378 km

M_{Marte}: 0,0108 M_T ; R_{Marte}= 3 397 km

Solución:

$$v_e(\text{Merc}) = \sqrt{\frac{2\ G\ M_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2\ 6,67\ 10^{-11}\ \frac{m^{\cancel{3}2}}{\cancel{kg}\ s^2}\ 0,0553\ 5,97\ 10^{24}\ \cancel{kg}}{2,439\ 10^6\ \cancel{m}}} = 4\ 249\ \frac{m}{s} = 15\ 296\ \frac{km}{h}$$

$$v_e(\text{Tierra}) = \sqrt{\frac{2\ G\ M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2\ 6,67\ 10^{-11}\ \frac{m^{\cancel{3}2}}{\cancel{kg}\ s^2}\ 5,97\ 10^{24}\ \cancel{kg}}{6,378\ 10^6\ \cancel{m}}} = 11\,181\ \frac{m}{s} = 40\ 252\ \frac{km}{h}$$

$$v_e(\text{Marte}) = \sqrt{\frac{2\ G\ M_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2\ 6,67\ 10^{-11}\ \frac{m^{\cancel{3}2}}{\cancel{kg}\ s^2}\ 0,0108\ 5,97\ 10^{24}\ \cancel{kg}}{3,397\ 10^6\ \cancel{m}}} = 1\,591\ \frac{m}{s} = 5\ 728\ \frac{km}{h}$$

Luego la velocidad de escape de la Tierra es considerablemente mayor que la de Mercurio y la de Marte:

Ve (Tierra) = 2,6 Ve(Mercurio)= 7,0 Ve(Marte)

El valor de la velocidad de escape está muy relacionado con el tipo de gases existentes en la atmósfera de los planetas.

La velocidad media de las moléculas de un gas depende de su temperatura y de su masa (Física. Vol I. M Alonso y E.J. Finn):

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

A igual temperatura las moléculas de los gases más ligeros tienen una mayor velocidad y pueden escapar más fácilmente. En consecuencia, los gases más ligeros (H y He) serán retenidos más difícilmente (por eso son escasos en la atmósfera terrestre).

Para planetas como Mercurio o Marte, con una velocidad de escape muy inferior, lo esperado es que retengan muy poca cantidad de gases a su alrededor. Prácticamente han perdido casi toda su atmósfera.

Los planetas más exteriores, mucho más másicos, poseen velocidades de escape considerablemente más altas. Además, debido a su lejanía del Sol, la temperatura de sus atmósferas es considerablemente más baja. Ambos efectos combinados pueden explicar la abundancia de H y He en sus atmósferas.

Ejemplo 5 (Oviedo. Fase específica. Junio 2009-2010)

Se lanza un objeto verticalmente desde la superficie de la Luna con una velocidad de 1,2 km/s. ¿Se escapará de la gravedad lunar o no? Si lo hace ¡con qué velocidad final lo hará? Si no lo hace ¿a qué altura llegará?

DATOS: M_{Luna}:7,35 10^{22} kg ; R_{Luna}= 1 738 km

Solución:

La velocidad mínima para que un objeto escape de la gravedad lunar será:

$$E_{Tot} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_L}{R_L} = 0$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2.6,67\;10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{kg}\;s^2}\,7,35\;10^{22}\;\cancel{kg}}{1,738\;10^6\;\cancel{m}}} = 2\,375\,\frac{m}{s} = 2,4\,\frac{km}{s}$$

Como la velocidad comunicada al objeto es inferior, ***no escapará de la gravedad lunar***.

Si consideramos el punto 1 situado en le superficie de la Luna y el 2 a la máxima altura alcanzada (donde se verificará que v =0), tendremos (suponiendo rozamiento nulo):

Punto 1

$$E_{c1} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{p1} = -\,G\frac{mM_L}{R_L}$$

Punto 2

$$E_{c2} = 0$$

$$E_{p2} = -\,G\frac{mM_L}{r}$$

Aplicando el Principio de Conservación de la Energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_L}{R_L} = -\,G\frac{mM_L}{r}$$

$$\frac{1}{2}v^2 - G\frac{M_L}{R_L} = -\,G\frac{M_L}{r}$$

$$r = \frac{GM_L}{G\frac{M_L}{R_L} - \frac{v^2}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{R_L} - \frac{v^2}{2\,GM_L}}$$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{1,738\;10^6 m} - \frac{(1,2\;10^3)^2\,\frac{\cancel{m^2}}{\cancel{s^2}}}{2\;6,67\;10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}\;\cancel{s^2}}\,7,35\;10^{22}\,\cancel{kg}}} = 2\,331\,002\text{ m} = 2\,331\text{ km}$$

$$h = r - R_L = \left(2\,331 - 1\,738\right)\text{ km} = 593\text{ km}$$

Ejemplo 6

Un satélite de 2 500 kg orbita en torna a la Tierra a 500 km de su superficie en una órbita circular. Calcular:

a) Calcular su energía cinética, su energía potencial y la total

b) Explicar qué es lo que sucederá si se incrementa su velocidad

DATOS: M $_{Tierra}$: 5,97 10^{24} kg ; R_{Tierra}= 6 370 km

Solución:

Podemos calcular la velocidad orbital partiendo de la condición dinámica para que exista una órbita circular y, a partir de ahí la energía cinética:

$$F_N = m\ a_N$$

$$G\frac{m\ M}{r^2} = m\frac{v^2}{r};$$

$$v = \sqrt{\frac{G\ M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67\ 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}\ 5,97\ 10^{24}\ kg}{6,87\ 10^6}} = 7\ 613,3\frac{m}{s} = 27\ 408\frac{km}{h}$$

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}2,5\ 10^6\ kg\left(7\ 613,3\frac{m}{s}\right)^2 = 7,25\ 10^{10}\,J$$

La energía potencial valdrá:

$$Ep = -G\frac{m\ M}{r} = -\ 6,67\ 10^{-11}\ \frac{m^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{kg}\ s^2}\ \frac{2,5\ 10^3\ \cancel{kg}\ 5,97\ 10^{24}kg}{6,87\ 10^6\ \cancel{m}} = -1,45\ 10^{11}\ J$$

Luego:

$$E_{Tot} = E_c + E_p = \left(7,25\ 10^{10} - 1,45\ 10^{11}\right)\ J = -7,25\ 10^{10}\ J$$

Como se puede comprobar para una órbita circular:

$$E_{Tot} = \frac{1}{2}\ Ep \quad ; \quad Ecin = \frac{1}{2}\left|Ep\right|$$

Si se aumenta su velocidad, el satélite describirá órbitas elípticas con la Tierra situada e uno de los focos.
Si la velocidad alcanzara el valor correspondiente a una energía total nula (velocidad de escape). Esto es :

$$E_{Tot} = Ec + Ep = \frac{1}{2}\ mv^2 - G\ \frac{m\ M}{r} = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2\ G\ M}{r}} = \sqrt{\frac{2\ .6,67\ 10^{-11}\ \frac{m^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{kg}\ s^2}\ 5,97\ 10^{24}\ \cancel{kg}}{6,87\ 10^6\ \cancel{m}}} = 10\ 767\frac{m}{s} = 38\ 761\ \frac{km}{h}$$

describirá una órbita parabólica y ya dejará de estar ligado gravitatoriamente a la Tierra (órbita abierta) . Su energía es suficiente para llegar a una distancia infinita con velocidad nula.

Si se comunica una energía aún mayor la órbita se convertirá en una hipérbola

INTERACCIÓN GRAVITATORIA
CAMPO GRAVITATORIO

La Ley de Gravitación Universal presentaba una importante laguna, y es no que no da una explicación de la forma en la que las masas ejercen su mutua influencia, ya que interactúan sin existir contacto físico entre ellas, mediante lo que Newton calificó como *"acción a distancia"* idea que, incluso a él, no le resultaba apropiada:

> *"Es inconcebible que la materia bruta e inanimada pueda, sin mediación de algo más que sea material, operar en otra materia y afectarla sin que se produzca un contacto mutuo. La gravedad tiene que provocarla un agente que actúe de manera constante según ciertas leyes"*

El posterior desenvolvimiento de la Física mostró que la acción a distancia llevaba a serias contradicciones. Para resolverlas se estableció ***el concepto de campo.***

Imaginemos una zona del espacio en la que no exista ninguna masa. Si introducimos una pequeña masa puntual m (*masa de prueba*) no se detectará acción alguna sobre ella.

Si ahora colocamos una masa M, su presencia ***modificará las propiedades del espacio circundante*** y si volvemos a introducir la masa de prueba, ésta acusará la existencia de una acción (fuerza) sobre ella que tiende a aproximarla a la masa M.

Se dice que la masa M crea un campo gravitatorio a su alrededor que actúa sobre la masa de prueba. De esta manera la acción deja de ejercerse a distancia siendo el campo el responsable de la acción ejercida sobre la masa de prueba.

El campo juega el papel de mediador en la interacción gravitatoria que Newton reclamaba.

El campo es una entidad física medible, y se define la intensidad del campo gravitatorio en un punto como la fuerza ejercida sobre la unidad de masa colocada en ese punto:

Fuerza

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}}$$

Intensidad del campo gravitatorio

Masa de prueba

La intensidad del campo gravitatorio en un punto (o simplemente campo gravitatorio) es un vector que tiene la misma dirección y sentido que la fuerza de atracción gravitatoria entre las masas y tiene dimensiones de aceleración.

$$\left[g\right] = \frac{\left[M\,L\,T^{-2}\right]}{\left[M\right]} = \left[L\,T^{-2}\right]$$

Unidades S.I: N/kg = m/s^2

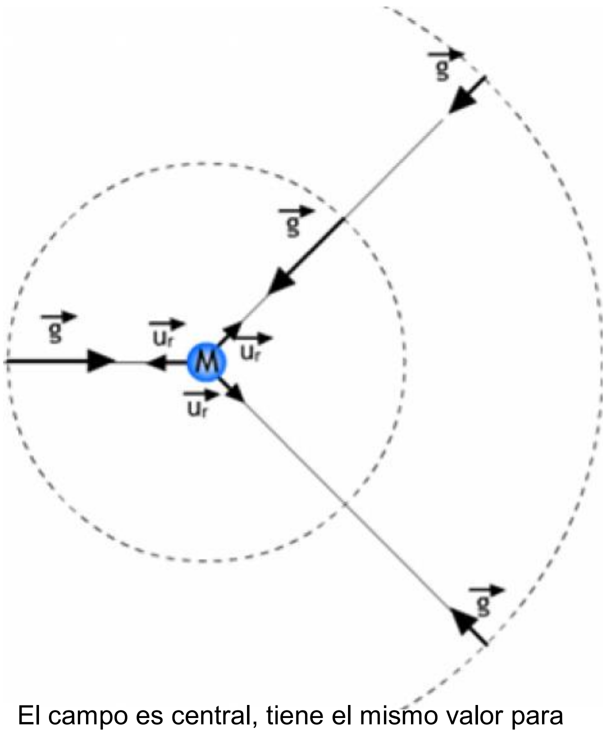
Teniendo en cuenta la expresión de la fuerza de atracción gravitatoria podemos obtener la intensidad del campo gravitatorio en un punto en función de la masa, M, que crea el campo y la distancia:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G\,\frac{m\,M}{r^2}\,\vec{u}_r}{m} = -G\,\frac{M}{r^2}\,\vec{u}_r$$

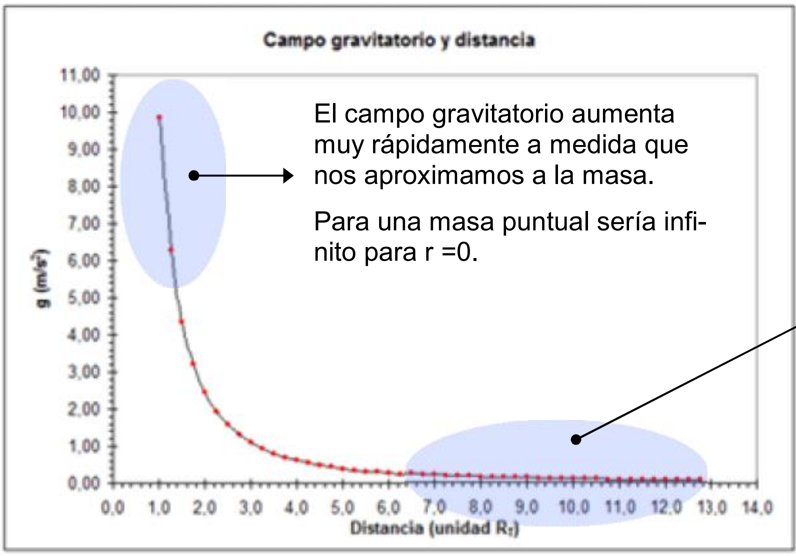
$$\boxed{\vec{g} = -G\,\frac{M}{r^2}\,\vec{u}_r}$$

El vector unitario $\boldsymbol{u_r}$ se define, tal y como se hizo a la hora de definir la fuerza de atracción gravitatoria (ver tema correspondiente).

- Como se puede observar la intensidad de campo, así definida, ***establece un vector*** (y sólo uno) para cada uno de los puntos del espacio. El campo gravitatorio es un ***campo vectorial***
- El valor del campo gravitatorio (módulo) en un punto ***es independiente de la masa de prueba*** y depende sólo de la masa que crea el campo y la distancia a la que esté el punto considerado.
- Todos los puntos que estén a una misma distancia de la masa central ***tendrán un mismo valor*** para la intensidad de campo.
- ***La distancia se toma siempre desde el centro de la masa***. Esto es, se considera la totalidad de la masa situada en su centro (masa puntual)
- La intensidad del campo gravitatorio ***decrece rápidamente con la distancia,*** ya que es ***inversamente proporcional a su cuadrado.***
- El signo menos de la ecuación de definición garantiza que ***el campo es central*** (dirigido siempre hacia la masa que crea el campo)

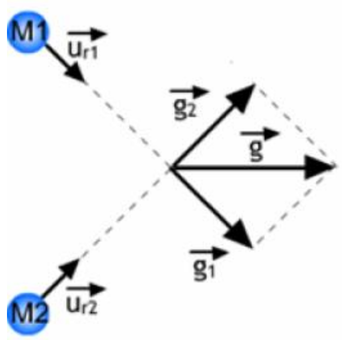


El campo es central, tiene el mismo valor para puntos situados a igual distancia y disminuye rápidamente al alejarse de la masa.



El campo gravitatorio disminuye muy rápidamente a medida que nos alejamos de la masa.

Será nulo a distancia infinita.



Si en las proximidades de un punto se localiza más de una masa, el campo gravitatorio en el punto considerado es el resultado de sumar (vectorialmente) cada uno de los campos individuales creados por las masas (Principio de Superposición).

Ejemplo 1

Calcular el valor del campo gravitatorio en un punto situado en la superficie de la Tierra y para un punto situado al doble y al cuádruple de esa distancia.

DATOS: M_{Tierra}: 5,97 10^{24} kg ; R_{Tierra}= 6,37 10^{6} m

Solución

$$g_{(R_T)} = G\,\frac{M}{R_T^2} = 6,67\ 10^{-11}\,\frac{\cancel{m^3}}{\cancel{kg}\ s^2}\,\frac{5,97\ 10^{24}\ \cancel{kg}}{(6,67\ 10^{6})^2\ \cancel{m^2}} = 9,81\,\frac{m}{s^2}$$

$$g_{(2R_T)} = G\,\frac{M}{(2\ R_T)^2} = \frac{1}{4}\left(G\ \frac{M}{R_T^2}\right) = \frac{1}{4}\ 9,81\frac{m}{s^2} = 2,45\ \frac{m}{s^2}$$

$$g_{(4R_T)} = G\,\frac{M}{(4\ R_T)^2} = \frac{1}{16}\left(G\ \frac{M}{R_T^2}\right) = \frac{1}{16}\ 9,81\frac{m}{s^2} = 0,61\ \frac{m}{s^2}$$

Como se puede ver el valor del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra coincide con el valor de la aceleración con la que caen los cuerpos (aceleración de la gravedad).

Si la distancia aumenta el doble el campo gravitatorio queda dividido por cuatro, y si aumenta el cuádruple el campo gravitatorio queda dividido por dieciséis.

Ejemplo 2

Calcular el campo gravitatorio creado en un punto del espacio a 2 000 km de la Luna y a 10 000 km de la Tierra cuando ambas se encuentran en cuadratura (formando un ángulo de 90^0, ver esquema)

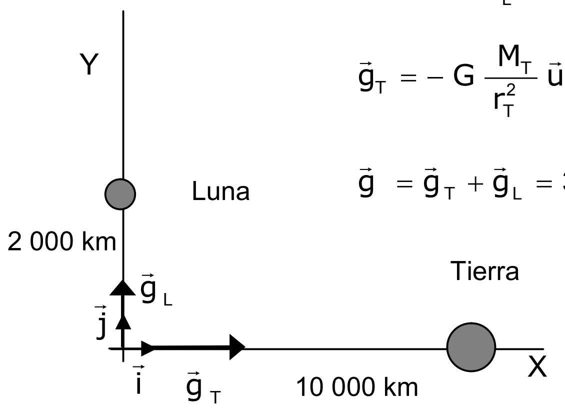
DATOS: M_{Tierra}: 5,97 10^{24} kg M_{Luna} = 7,35 10^{22} kg

Solución

$$\vec{g}_L = -G\,\frac{M_L}{r_L^2}\,\vec{u}_{rL} = -6,67\ 10-11\frac{\cancel{m^3}}{\cancel{kg}\ s^2}\,\frac{7,35\ 10^{22}\ \cancel{kg}}{\left(2\ 10^{6}\right)^2\ \cancel{m^2}}(-\vec{j}) = 1,23\vec{j}\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$\vec{g}_T = -G\,\frac{M_T}{r_T^2}\,\vec{u}_{rT} = -6,67\ 10-11\frac{\cancel{m^3}}{\cancel{kg}\ s^2}\,\frac{5,97\ 10^{24}\ \cancel{kg}}{\left(10^{7}\right)^2\ \cancel{m^2}}(-\vec{i}) = 3,98\vec{i}\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

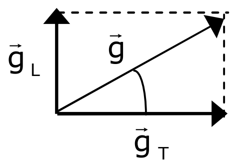
$$\vec{g} = \vec{g}_T + \vec{g}_L = 3,98\vec{i} + 1,23\vec{j}\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$$



El módulo valdrá:

$$\vec{g} = \vec{g}_T + \vec{g}_L = 3,98\vec{i} + 1,23\vec{j}\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$g = \sqrt{\left(3,98^2 + 1,23^2\right)\left(\frac{m}{s^2}\right)^2} = 4,17\ \frac{m}{s^2}$$



Ángulo con el eje X:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{g_L}{g_T} = \frac{1,23}{3,98} = 0,3090 \quad ; \quad \alpha = 17,2^0$$

Campo gravitatorio y acción sobre las masas

Es conveniente diferenciar claramente entre campo y acción (fuerza) ejercida sobre las masas situadas en su seno.

El campo es algo que sólo depende de la masa que lo crea. Si ahora introducimos una masa en el campo, éste ejerce una acción sobre ella (fuerza). La fuerza ejercida por el campo sobre la masa se puede calcular fácilmente si se conoce el valor del campo:

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{g}}$$

Ejemplo 3

Calcular el campo gravitatorio creado en un punto situado a 2 000 km de una masa de 3,50 10^{23} kg. Calcular a continuación la fuerza de atracción sobre una masa de 100 kg y otra de 1 000 kg situadas en ese punto.

Solución

$$g = G\,\frac{M}{r^2} = 6,67\;10^{-11}\,\frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}\;s^2}\,\frac{3,50\;10^{23}\,\cancel{kg}}{(2\;10^6)^2\,\cancel{m^2}} = 5,84\,\frac{m}{s^2}$$

$$F_{(100)} = m\,g = 100\ kg\ \ 5,84\,\frac{m}{s^2} = 584\ N$$

$$F_{(1000)} = m\,g = 1\,000\ kg\ \ 5,84\,\frac{m}{s^2} = 5\,840\ N$$

El campo gravitatorio tienen un valor único para ese punto, sin embargo la fuerza sobre las masas introducidas en el campo depende del valor de dichas masas.

La fuerza actuante sobre una masa situada en un campo gravitatorio, como es lógico, no es otra que la fuerza de atracción gravitatoria, ya que:

$$\vec{F} = m\,\vec{g} = m\left(-G\,\frac{M}{r^2}\,\vec{u}_r\right) = -G\,\frac{m\,M}{r^2}\,\vec{u}_r$$

A su vez el valor del campo gravitatorio en la superficie e la Tierra, tal y como ya se ha comentado, no es otra cosa que lo que se conoce como "aceleración de la gravedad" (g = 9,81 m/s^2).

La identidad entre el campo gravitatorio y la aceleración con que los cuerpos caen llevó a Albert Einstein a enunciar el ***Principio de Equivalencia*** entre campos gravitatorios y sistemas sometidos a un movimiento uniformemente acelerado (ver el ejemplo del ascensor en apuntes dedicados a sistemas no inerciales), lo que constituyó la base para el desarrollo de la Teoría de la Relatividad General.

Potencial gravitatorio

La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa. En consecuencia, a toda masa situada en su seno se le puede asignar una energía potencial. Basándonos en este hecho se puede definir una nueva magnitud (característica de los campos conservativos) denominada ***potencial gravitatorio, V:***

Potencial gravitatorio

$$\boxed{V = \frac{E_P}{m}}$$

Energía potencial

Masa colocada en el campo

> ***El potencial gravitatorio se define, por tanto, como la energía potencial por unidad de masa colocada en el campo***

El potencial gravitatorio es un número (escalar) que se puede asignar a cada uno de los puntos del campo, siendo su valor:

$$V = \frac{E_P}{m} = \frac{-G\,\frac{m\,M}{r}}{m} = -G\,\frac{M}{r}$$

$$\boxed{V = -G\,\frac{M}{r}}$$

> Si existe mas de una masa el potencial gravitatorio en un punto es la suma de los potenciales debidos a cada una de las masas (Principio de Superposición):
>
> ***$V_{TOT} = V_1 + V_2 + V_3$ ...***

Como se puede ver el valor del potencial gravitatorio sólo depende de la masa que crea el campo y de la distancia al punto considerado y es siempre negativo, ya que su valor cero (al igual que el de la energía potencial) se sitúa a una distancia infinita del centro de la masa que crea el campo.

Dimensionalmente:

$$[V] = \frac{[M\,L^2\,T^{-2}]}{[M]} = [L^2\,T^{-2}]$$

Unidades S.I: J/kg = m^2/s^2

Al igual que sucedía en el caso del campo gravitatorio es importante distinguir entre el potencial gravitatorio (V) y la energía potencial de una masa colocada en su seno. Ésta depende del valor de la masa y se puede obtener fácilmente si se conoce el valor del potencial gravitatorio:

$$\boxed{Ep = m\,V}$$

Como se deduce de la ecuación que permite calcular el potencial gravitatorio en un punto, todos los puntos situados a una misma distancia (r) de la masa que crea el campo tendrán idéntico potencial. Si se unen con una línea todos estos puntos obtendremos circunferencias centradas en la masa que cumplen la condición de que ***todos sus puntos se encuentran al mismo potencia***l. Por esta razón reciben el nombre de ***líneas (o superficies, en tres dimensiones) equipotenciales.***

De todo lo dicho se deduce que el trabajo realizado por la fuerza del campo (gravedad) para llevar una masa ***m*** desde un punto ***1*** hasta otro ***2*** se puede calcular (fuerza conservativa) por diferencia entre las respectivas energías potenciales:

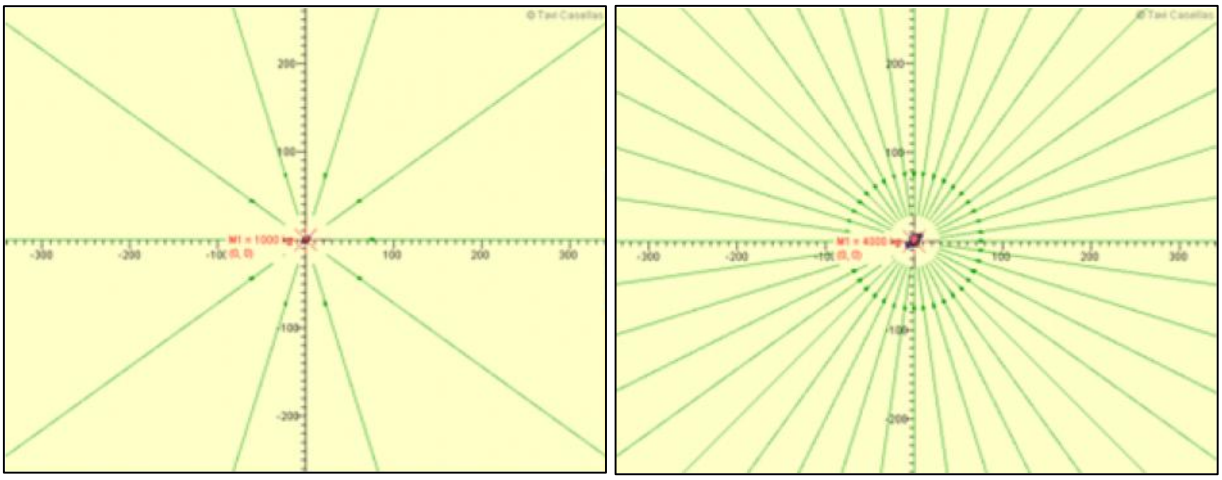
$$W_{cons} = -\,\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2} = m\,V_1 - m\,V_2 = m\,(V_1 - V_2)$$

Si nos movemos a lo largo de una línea equipotencial (V_2=V_1) el trabajo realizado será nulo. La fuerza de gravedad no realiza trabajo alguno, o lo que es equivalente, no se requiere aporte alguno de energía para trasladar una masa a lo largo de una línea equipotencial, de lo que se deduce que ***la fuerza gravitatoria debe de ser perpendicular a la línea equipotencial.***

Campo gravitatorio, líneas de fuerza y superficies equipotenciales

Con el fin de visualizar el campo se recurre a dibujar las llamadas **“líneas de campo o líneas de fuerza”** que cumplen la condición de que ***el vector campo es siempre tangente*** en cualquiera de sus puntos y se trazan de modo que ***su densidad sea proporcional a la intensidad del campo***.

- Para una única masa las líneas de campo son radiales y siempre convergen hacia la masa. Se dice que las masas constituyen "sumideros de campo".
- Las líneas de fuerza representan las trayectorias que seguiría una masa situada en el campo

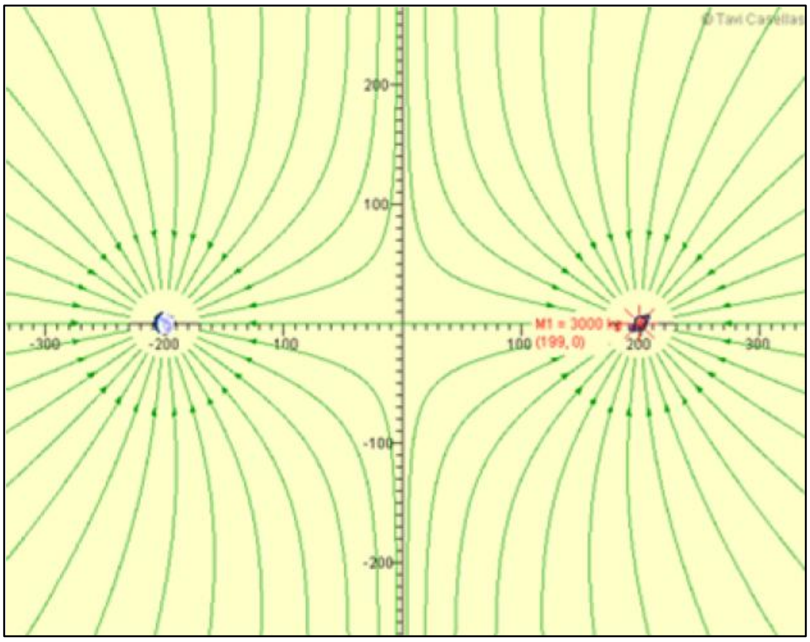


Izquierda: líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por un objeto de 1 000 kg.
Derecha: líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por un objeto de 4 000 kg

En ambos casos las líneas de campo son radiales y entran hacia la masa. La mayor densidad de líneas en el segundo caso (líneas mucho más juntas) representan un campo gravitatorio más intenso

Captura de pantalla de ***FisLab.net.*** Autor: **Tavi Casellas**
(http://www.xtec.cat/~ocasella/applets/gravita/appletsol2.htm)

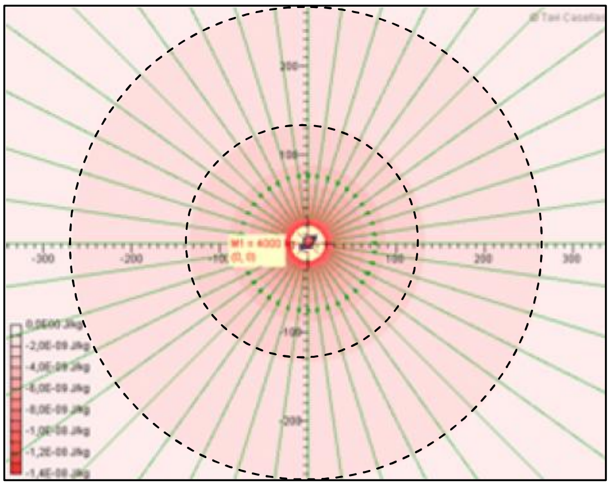
- Si hay más de una masa el campo se distorsiona debido a la superposición de ambos campos (en cada punto el campo resultante es la suma vectorial de los campos debidos a cada una de las masas). En la captura de pantalla se muestra el campo resultante para dos masas iguales (3 000 kg)

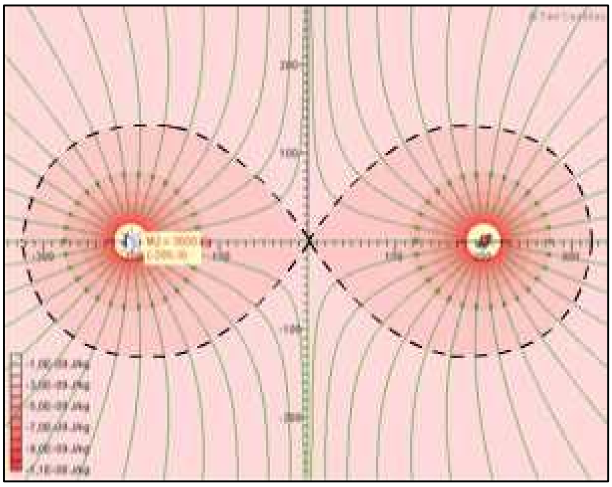


Captura de pantalla de FisLab.net. Autor: **Tavi Casellas**
http://www.xtec.cat/~ocasella/applets/gravita/appletsol2.htm

La líneas (o superficies) equipotenciales, tal y como se ha dicho, son siempre perpendiculares al vector campo y cuando una masa se desplaza a lo largo de ellas la fuerza de gravedad no realiza trabajo alguno o, lo que es equivalente, no se requiere aporte alguno de energía para trasladar la masa.

Para una masa única las líneas equipotenciales son circunferencias centradas en la masa.





Izquierda: líneas equipotenciales (de puntos) del campo gravitatorio de una sola masa.
Derecha: línea equipotencial (de puntos) del campo gravitatorio creado por dos masas iguales

Captura de pantalla (modificada) de ***FisLab.net.*** Autor: **Tavi Casellas**
(http://www.xtec.cat/~ocasella/applets/gravita/appletsol2.htm)

De todo lo dicho también se puede establecer una relación entre el valor del campo gravitatorio en un punto y el potencial. Para una masa puntual:

$$\left.\begin{aligned} g &= G\frac{M}{r^2} \\ V &= -G\frac{M}{r} \end{aligned}\right\} \boxed{g = -\frac{V}{r}}$$

Ejemplo 4 (Oviedo, 2009-10)

Una masa puntual, m, genera un campo gravitatorio. En un punto el potencial vale V (referido a valor nulo en el infinito) y la intensidad del campo es 1,6 m/s^2. Ahora tomamos un punto en el que el potencial vale V_2= 2V ¿Cuánto vale la nueva intensidad del campo gravitatorio?

Solución

Teniendo en cuenta el valor del potencial (ver más arriba), podemos decir que si el potencial en el punto 2 es doble que en el punto inicial es porque está situado a una distancia mitad de la masa que crea el campo:

$$V_1 = -G\frac{M}{r_1} = V$$

$$V_2 = -G\frac{M}{r_2} = 2V_1 = -2\,G\frac{M}{r_1} \Rightarrow \quad r_1 = 2\,r_2$$

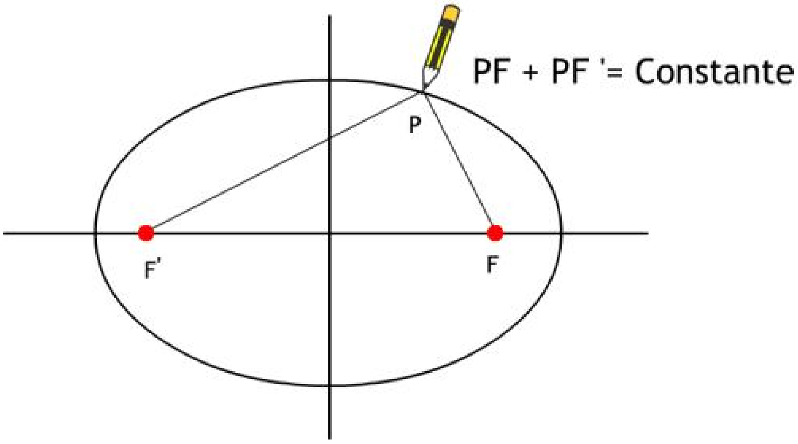
Si r_1 = 2 r_2 el campo en el segundo punto será cuatro veces superior, ya que el campo varía con el cuadrado de la distancia:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= G\frac{M}{r_1^2} \\ g_2 &= G\frac{M}{r_2^2} \end{aligned}\right\} \frac{g_1}{g_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_2^2}{(2\,r_2)^2} = \frac{1}{4}\,; \quad \boxed{g_2 = 4\,g_1 = 4 \times 1{,}6\frac{m}{s^2} = 6{,}4\frac{m}{s^2}}$$

ANEXOS

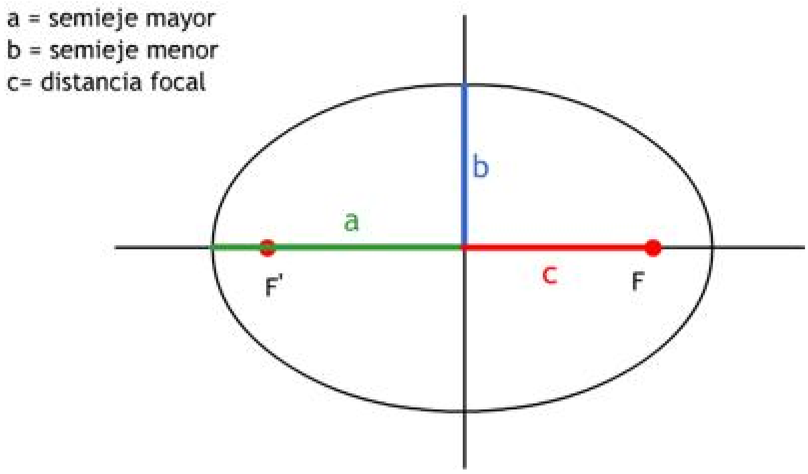
Sobre la elipse

La elipse es una curva cerrada y plana en la que todos sus puntos cumplen la condición de que la suma de distancias a dos puntos (F y F') llamados focos es constante.



Uno de los métodos usados para construir una elipse se basa, precisamente, en esta definición.

Como se puede ver en la imagen si se fija un hilo a dos puntos (F' y F) y se dibuja una línea con un lápiz tal y como se indica en la figura el resultado es una elipse ya que F'P+FP=cte.



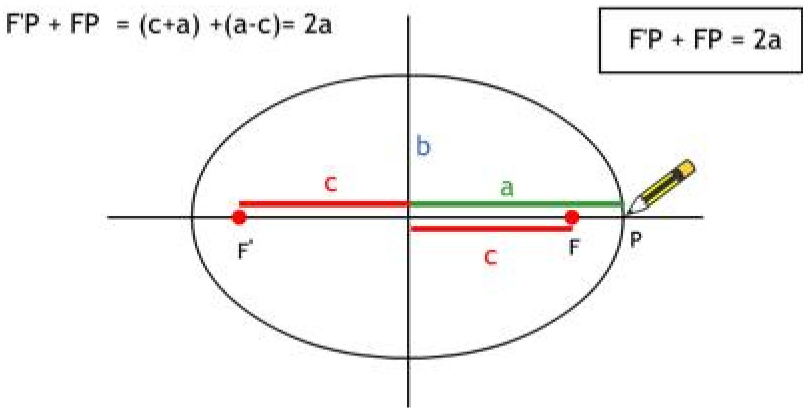
Los parámetros más importantes de la elipse son:

El semieje mayor, a.

El semieje menor, b.

La distancia focal, c.

El eje mayor tendrá por tanto una longitud igual a 2a, el menor a 2b y la distancia entre focos será igual a 2c

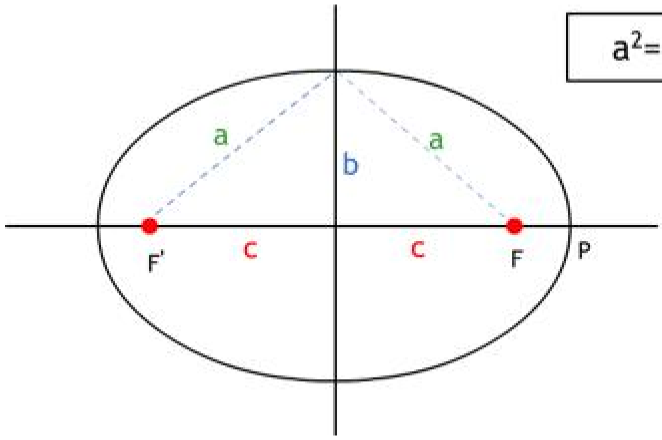


La suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos siempre vale 2a.

Efectivamente como podemos ver en la imagen de la izquierda

F'P+FP = 2a

Esta igualdad será cierta para todos los puntos, ya que por definición la suma de distancias es invariable.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Entre el semieje mayor, a, el menor, b, y la distancia focal, c, se establece la siguiente relación

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Para una longitud dada del semieje mayor, a, el que una elipse sea más o menos "achatada" (lo que se mide con el parámetro llamado ***"excentricidad"***) depende de la distancia entre los focos.

Se denomina excentricidad de la elipse a la relación entre la distancia focal y el semieje mayor:

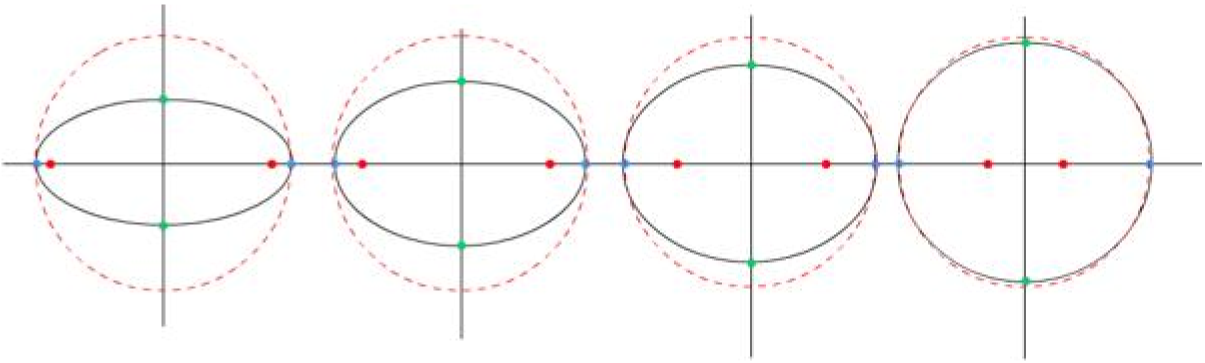
$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$$

Si c = 0, la excentricidad es nula y tenemos una circunferencia (a =b)
Si c = a, la excentricidad es la unidad y tenemos una recta

Por tanto la excentricidad de una elipse puede tomar valores comprendidos entre cero y uno.

Recordando la expresión de c en función de a y b (ver más arriba) también podemos expresar la excentricidad como:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$



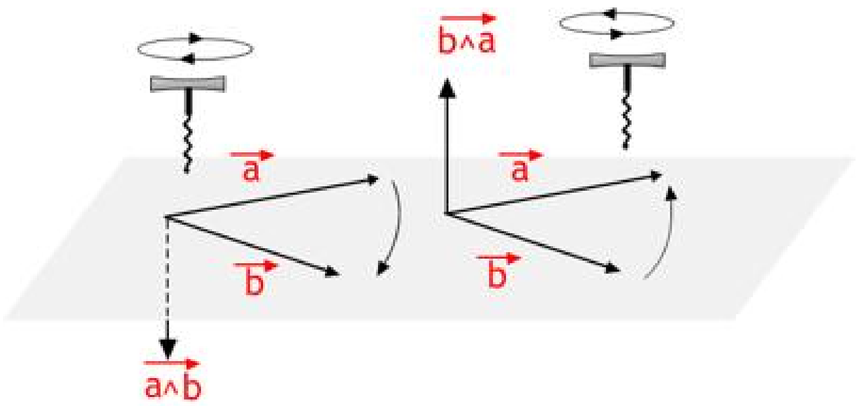
Elipses con distinta excentricidad. Todas tienen idéntico el semieje mayor. Observar que cuando la distancia entre los focos se acorta, la excentricidad de la elipse disminuye acercándose a la circunferencia (línea punteada).

Producto vectorial de dos vectores

Momento angular

Se define el ***producto vectorial de dos vectores*** $\vec{a} \wedge \vec{b}$ como un vector:

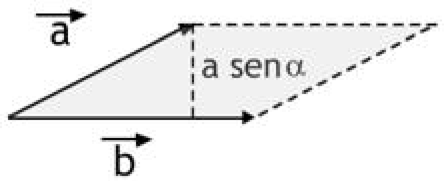
- Cuyo ***módulo*** es el producto de los módulos de los vectores por el seno del ángulo que forman: $a\ b\ \mathrm{sen}\alpha$
- Cuya ***dirección*** es perpendicular al plano definido por ambos vectores.
- Cuyo ***sentido*** es el del sacacorchos que gira del primer al segundo vector por el camino más corto.

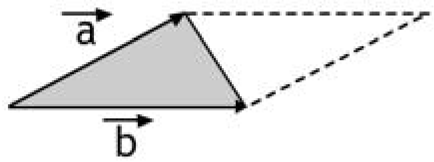


El módulo del producto vectorial es igual al área del paralelogramo construido con ambos vectores como lados. También se puede ver en la figura que ***es la mitad del área del triángulo formado al dividir en dos partes iguales al paralelogramo.***

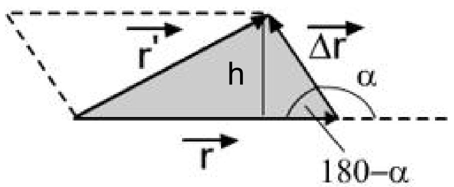
$A_{paralel} = b.h = b.\ a\ \mathrm{sen}\ \alpha = |\overrightarrow{a \wedge b}|$

$A_{triángulo} = \frac{1}{2} A_{paralelogramo} = |\overrightarrow{a \wedge b}|$





Otro ejemplo:

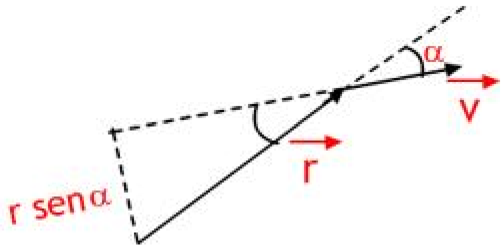


$|\vec{r} \wedge \Delta\vec{r}| = r\ \Delta r\ \mathrm{sen}\ \alpha = A_{paralelogramo} = 2\ A_{triángulo}$

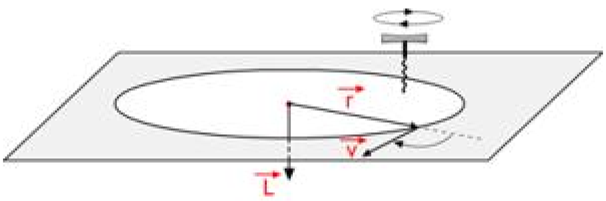
Ya que: $h = \Delta r\ \mathrm{sen}\ (180 - \alpha)$ y $\mathrm{sen}(180 - \alpha) = \mathrm{sen}\ \alpha$

Para dar valor a los giros se define una magnitud denominada ***momento angular*** (o momento cinético), $\vec{L}$ definido como el producto vectorial del vector de posición del punto considerado por su momento lineal, $\vec{p}$

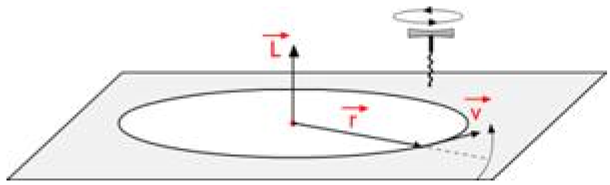
$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\,\vec{v}$$
$$\text{Módulo} = r\,m\,v\,\text{sen}\,\alpha = r_{\perp}\,m\,v$$
$$\text{Donde}: r_{\perp} = r\,\text{sen}\,\alpha$$



El momento angular, así definido, recoge las magnitudes que caracterizan a una partícula que gira: su masa, su velocidad y la distancia (medida en perpendicular) al centro de giro. Además, el sentido del vector nos indica en qué sentido se realiza el giro:

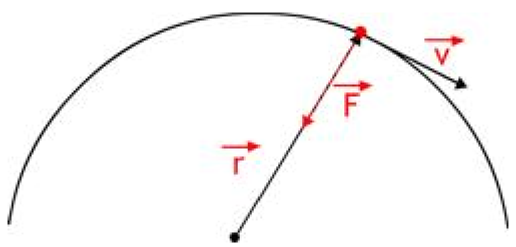


Cuando se va de ***r*** a ***v*** por el camino más corto (hay que llevar el vector ***r*** a concurrencia con ***v***) el sacacorchos gira hacia la derecha, lo que provocaría un movimiento de avance hacia abajo.



Giro hacia el otro lado.
El sacacorchos gira hacia la izquierda, lo que provocaría un movimiento de avance hacia arriba.

Cuando una fuerza es central (apunta siempre hacia el centro de la trayectoria), el momento angular permanece invariable.



$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\,\vec{v}$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} \wedge m\,\vec{v} + \vec{r} \wedge m\,\frac{d\,\vec{v}}{dt} = \vec{v} \wedge m\,\vec{v} + \vec{r} \wedge m\,\vec{a}$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 + \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0$$
$$\text{Si}: \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \text{cte}}$$

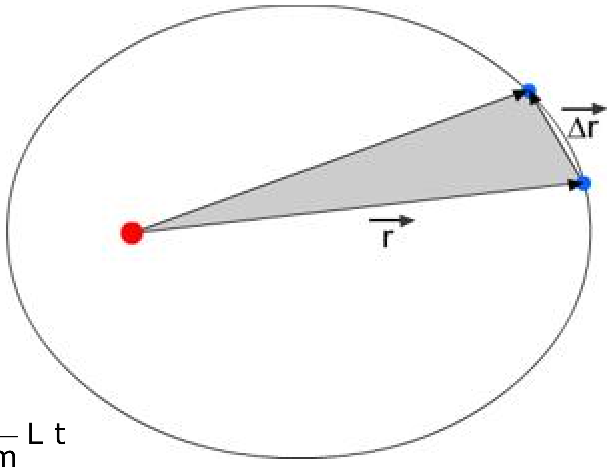
La invarianza del vector momento angular implica constancia en ***módulo, dirección y sentido.***

Cuando un objeto gira sometido a una fuerza central, el vector momento angular permanece constante lo que implica que la órbita ha de ser plana.

Los planetas, por tanto, describirán órbitas planas en su movimiento alrededor del Sol.

De la constancia del momento angular de una partícula cuando se mueve sometida a fuerzas centrales se deduce que la velocidad areolar (rapidez con la que el vector barre el área) es constante:

En efecto, si suponemos un ángulo lo suficientemente pequeño, podríamos considerar que el área del triángulo formado por los vectores de posición y su diferencia es el área barrida por el vector de posición en un tiempo t. Según se ha dicho más arriba este área es la mitad del módulo del producto vectorial



$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge \overrightarrow{\Delta r}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge \vec{v}\ t\right| = \frac{1}{2\,m}\left|\vec{r} \wedge m\,\vec{v}\ \right|t = \frac{1}{2\,m} L\ t$$

Por tanto:

$$A = \frac{1}{2\,m} L\ t\ ;\ \boxed{\frac{A}{t} = \frac{L}{2\,m}}$$

Como el momento angular es constante la velocidad areolar, A/t, es constante.

La Segunda Ley de Kepler aparece, por tanto, como una consecuencia de que la fuerza a la que están sometidos los planetas (atracción del Sol) es central (el momento angular se mantiene invariable).