1º.- a) Encontrar el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ en el que $z=2$

b) Escribir la ecuación de la recta "s",paralela a "r" que pasa por el punto $(0,0,0)$

c) Escribir la ecuación del plano que contiene a las dos rectas,"r" y "s", anteriores.

Solución:

a) Haciendo $z=2$ en $r \equiv \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ y resolviendo, tenemos $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$, luego el punto buscado es el $(1,4,2)$

b) El vector director de la recta r es $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [0,-3,-3] \Leftrightarrow [0,1,1]$, luego la recta s es $\begin{cases} y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

c) El vector de la recta r pertenece al plano buscado, y el vector que une los puntos $(1,4,2)$ de la recta r y $(0,0,0)$ de la recta s también pertenece al plano; luego el plano buscado es:

$$\begin{cases} x=\mu \\ y=\lambda+4\mu \\ z=\lambda+2\mu \end{cases} \Leftrightarrow 2x-y+z=0$$

2º.- Comprobar que las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x-3y+z+5=0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x-2y+z+4=0 \\ x+y-2z-5=0 \end{cases}$ se cortan en un punto ¿Cuál?

Solución:

Si las dos rectas se cortan en un punto, el sistema $\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x-3y+z+5=0 \\ x-2y+z+4=0 \\ x+y-2z-5=0 \end{cases}$ debe ser compatible y determinado; aprovechamos el método de Gauss para estudiar al mismo tiempo el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada:

$$Rang\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\2&-3&1&5\\1&-2&1&4\\1&1&-2&-5\end{pmatrix} Rang\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&-5&-1&9\\0&-3&0&6\\0&0&-3&-3\end{pmatrix}\to Rang\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&-5&-1&9\\0&0&3&3\\0&0&-3&-3\end{pmatrix}=3$$

Tanto la matriz de coeficientes como la ampliada tienen el mismo rango, 3; luego el sistema es compatible y determinado y los planos se cortan en u punto.

Para encontrar el punto de contacto, resolvemos

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=2\\-5y-z=-9\\3z=-3\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=2\\z=-1\end{array}\right.\Rightarrow(1,2,-1) \text{ es el punto buscado}$$

3º.-a) Estudiar la posición relativa de los planos: $\pi_1\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\y=1+\lambda+\mu\\z=-2\lambda-\mu\end{cases}$ y

$$\pi_2\equiv\begin{cases}x=3+3\gamma+\tau\\y=1-4\gamma\\z=-1+\gamma-\tau\end{cases}$$

b) Encontrar el plano que no tiene ningún punto en común con ninguno de los dos planos anteriores y que pasa por el origen de coordenadas.

Solución:

a) El vector $\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&-2\\0&1&-1\end{vmatrix}=[1,1,1]$ es un vector normal al plano π_1 y el vector $\begin{vmatrix}i&j&k\\3&-4&1\\1&0&-1\end{vmatrix}=[4,4,4]$ es vector normal al plano π_2; como ambos vectores son paralelos los planos son paralelos o coincidentes. Como el punto $(3,1,-1)$ del plano π_2 no pertenece al plano π_1, como es fácil comprobar, los planos son <u>paralelos</u>

b) Todo plano paralelo a los otros no tiene ningún punto en común con ellos, lego tendrá la forma $x+y+z+D=0$; pero como tiene que pasar por $(0,0,0)$ **,** el plano buscado es

$$x+y+z=0$$