Tema III: Dinámica

3.1.- Introducción:

La ***dinámica*** es la parte de la Física que estudia los movimientos y sus leyes en relación con las causas que los originan, o dicho de otra manera, estudia las fuerzas en relación con los movimientos que producen.

3.1.1.- Concepto de Punto material:

En este tema consideraremos solamente el movimiento de traslación de un cuerpo, y con objeto de simplificar su estudio, nos referiremos al llamado ***punto material***.

Un ***punto material*** es un punto geométrico (sin dimensiones) con masa, y que no presenta rotaciones ni deformaciones, siendo lo único que se puede observar en él la posición que ocupa en un instante determinado, así como sus cambios de posición respecto a un sistema de referencia.

3.1.2.- Sistema de referencia inercial:

Sistema de Referencia Inercial (SRI) es sistema de referencia fijo o en movimiento rectilíneo y uniforme (con velocidad cte.).

3.2.- Leyes de Newton:

3.2.1.- Primer Principio o Principio de inercia:

Si sobre un cuerpo no actúa fuerza alguna, o la resultante de las fuerzas que actúan sobre él es nula, el cuerpo permanece indefinidamente en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme.

3.2.2.- Segundo Principio o Principio fundamental:

Si sobre un cuerpo actúa una fuerza, o varias (Principio de superposición) cuya resultante no sea nula, se le comunica una aceleración que es directamente proporcional a la intensidad de la fuerza aplicada e inversamente proporcional a una cantidad característica del cuerpo denominada masa inerte.

Matemáticamente: $a = \dfrac{\sum F}{m}$

Como la fuerza y la aceleración son magnitudes vectoriales, la ecuación anterior se puede expresar como:

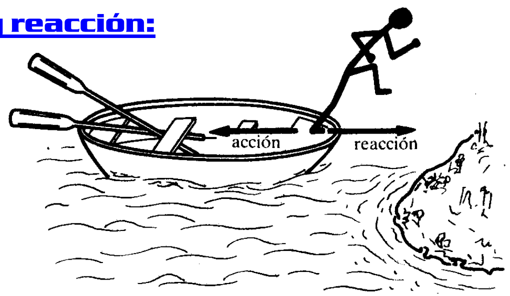
$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

teniendo en cuenta que $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$, resulta que: $\vec{F} = m\left[\dfrac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\hat{k}\right]$

3.2.3.- Tercer principio o principio de acción y reacción:

Si un cuerpo sobre actúa sobre otro con una fuerza (***acción***), éste reacciona contra el primero con una fuerza igual, de la misma dirección y de sentido contrario (***reacción***).

$$\vec{F}_{\text{Acción}} = -\vec{F}_{\text{Reacción}}$$



3.4.- Fuerza y movimiento

Las fuerzas se pueden clasificar atendiendo al tiempo que dura su actuación o al valor de su módulo. En el primer caso se dividen en instantáneas y continuas, mientras que en el segundo se dividen en constantes y variables.

3.4.1.- Fuerza Instantánea: Es aquella fuerza que actúa durante un tiempo corto, que resulta inapreciable.

> Las fuerzas instantáneas producen en los cuerpos movimientos rectilíneos y uniformes.

3.4.2.- Fuerza Continua: Es aquella fuerza que actúa durante un tiempo suficientemente largo como para ser medido; por ejemplo, cuando empujamos un coche.

Una fuerza continua es ***constante*** si conserva, mientras actúa, ***la misma intensidad***, y será ***variable*** si su ***intensidad varía***.

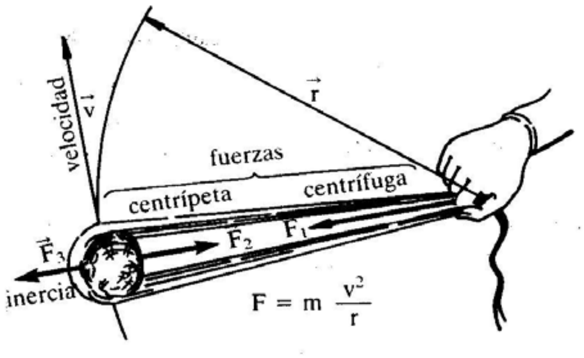
> Una fuerza continua produce un movimiento variado. Si la fuerza ***continua es constante***, el movimiento será ***uniformemente variado o circular uniforme***, y si es ***variable***, ***variado no uniformemente***.

3.4.3.- Dinámica del movimiento circular: Fuerzas centrípeta y centrífuga. En el tema 2, hemos visto que todo punto material de masa m que describe una trayectoria circular, con velocidad cte. V, está sometido a una ***aceleración radial, normal o centrípeta***, de valor $a_r = \frac{V^2}{R}$, siendo R el radio de la circunferencia descrita. Por lo tanto, según el principio fundamental, ha de existir una fuerza que origine esta aceleración. A esta fuerza, dirigida constantemente hacia el centro se la denomina ***fuerza centrípeta***.

$$F_c = m \cdot a = m \cdot \frac{V^2}{R} = m \cdot \frac{(\omega \cdot R)^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R$$

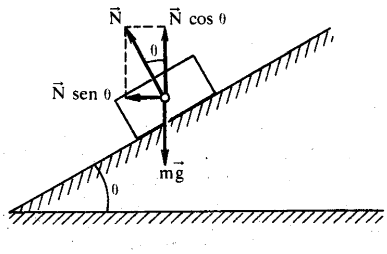
Donde T es el periodo de revolución.

Si hacemos girar una piedra sujeta a nuestra mano con una cuerda, la mano ejerce sobre la piedra una fuerza centrípeta (acción), pero de acuerdo con el tercer principio de la Dinámica, la piedra reacciona sobre la mano con una fuerza igual y de sentido contrario (fuerza centrífuga). Ambas fuerzas son reales y actúan sobre cuerpos distintos: son una pareja de fuerzas de acción y reacción.



3.4.4.- Peralte en las curvas. En las curvas, el suelo de las carreteras suele tener una cierta inclinación que recibe el nombre de ***peralte*** y cuya misión es aumentar la estabilidad de los coches, que se ven amenazados por la fuerza centrífuga. De no existir peralte, las ruedas patinarían, y si la curva fuese muy cerrada el coche podría llegar a volcar.

Las fuerzas que actúan sobre un coche que recorre una curva tomando como sistema de referencia la tierra son: El peso, verticalmente y hacia abajo y la reacción de la carretera.



$$N \cdot Cos\theta = m \cdot g$$

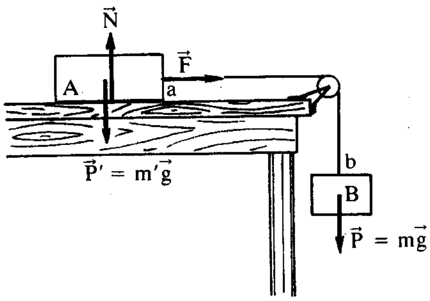
$$N \cdot Sen\theta = m \cdot a_r = m \cdot \frac{V^2}{R}$$

Si dividimos ambas expresiones obtenemos:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{V^2}{r \cdot g}}$$

3.5.- Tensiones en hilos y poleas.

Los hilos y las cuerdas solo sirven para transmitir fuerzas de un cuerpo a otro, y las poleas fijas se utilizan para modificar la dirección y el sentido de las fuerzas transmitidas por los hilos.

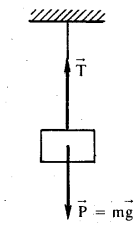


Así, por ejemplo, en la figura la cuerda ab transmite al cuerpo A la fuerza ejercida por el peso del cuerpo B, y la polea transforma en horizontal la dirección vertical de la fuerza $\vec{P}$.

Si aplicamos a los extremos de un hilo o cuerda dos fuerzas iguales en intensidad y de sentido contrario, el hilo se pone tenso.

> ***Tensión*** de un hilo es cada una de las fuerzas que éste soporta en sus extremos.

3.5.1.- Tensión que soporta una cuerda que sujeta un cuerpo en reposo o que se mueve con velocidad cte.

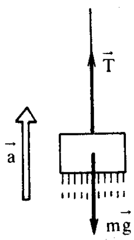


En este caso tiene que ocurrir que la fuerza neta sea nula.

Por tanto $T - P = 0$

De donde: $\boxed{T = P = m \cdot g}$

3.5.2.- Tensión que soporta una cuerda sujeta a un cuerpo que sube con aceleración cte.



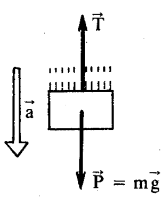
Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son las representadas en la figura. Para que exista M.R.U.A. tiene que haber una fuerza cte. $\vec{T}$ que sea mayor que la que se opone al movimiento del cuerpo $\vec{P}$. Según esto:

$$T - m \cdot g = m \cdot a$$

De donde:

$$\boxed{T = m(g + a)}$$

3.5.3.- Tensión que soporta una cuerda una cuerda que cae con aceleración cte mayor que g.

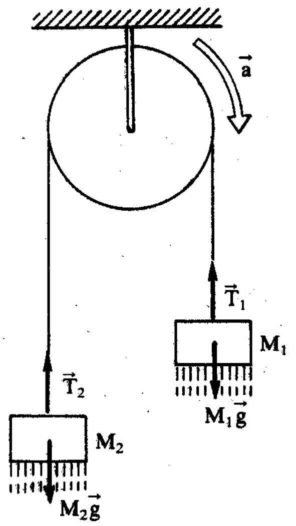


Según esto, para que el cuerpo caiga con aceleración cte. Tiene que existir una fuerza cte. Mayor que la que se opone al movimiento $\vec{T}$.

Por tanto en este caso:

$$\boxed{T = m(g - a)}$$

3.5.4.- Máquina de Atwodd: Es un sistema integrado por dos cuerpos de masas m_1 y m_2 unidos por una cuerda que pasa por la garganta de una polea fija sin rozamiento.



La fuerza que produce la aceleración del sistema es la diferencia de peso entre los cuerpos, $(m_1 - m_2)\cdot\vec{g}$ (considerando que $m_1>m_2$) y como dicha fuerza actúa sobre la masa total del sistema m_1+m_2, aplicando la ecuación fundamental de la dinámica:

$$(m_1 - m_2)\cdot g = (m_1 + m_2)\cdot a$$

Despejando a obtenemos:

$$\boxed{a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cdot g}$$

Calculemos ahora las tensiones que ejerce la cuerda a ambos lados de la polea. Como $m_1>m_2$, el cuerpo que está situado a la derecha de la polea bajará con una aceleración a. Resulta que:

$$T_1 = m_1(g - a)$$

Y como $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cdot g$, sustituyendo obtenemos:

$$T_1 = m_1\left[g - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cdot g\right] = \frac{2\cdot m_1\cdot m_2}{m_1 + m_2}\cdot g$$

Como el cuerpo que está situado a la izquierda sube con la misma aceleración, se deduce por tanto que:

$$\boxed{T_1 = T_2}$$

Las tensiones de la cuerda a ambos lados de la polea son iguales, si se desprecian las masas de la polea y de la cuerda y se considera nulo el rozamiento.

***Ejemplo 1**: En los extremos de una cuerda que pasa por una polea sin rozamientos se colocan dos cuerpos de 8 y 12 kg de masa respectivamente.*

***a)** Calcular la aceleración del sistema dejado en libertad.*
***b)** ¿Qué tensión soporta la cuerda?*
***c)** Calcular el tiempo que tardarán ambos cuerpos en desnivelarse 6 metros, suponiendo que en el instante inicial estaban a la misma altura.*

a.) $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cdot g = \frac{(12-8)kg}{(12+8)kg}\cdot 9{,}8 m/s^2 = 1{,}96\ \mathrm{m/s^2}$

b.) Si consideramos el cuerpo que baja: $T = m_1(g - a) = 12kg(9{,}8 - 1{,}6)m/s^2 = 94{,}1N$

Si consideramos el cuerpo que sube: $T = m_2(g + a) = 8kg(9{,}8 + 1{,}6)m/s^2 = 94{,}1N$

c.) Para que el desnivel entre ambos sea de 6 metros, cada uno de ellos ha de recorrer 3 metros. Por tanto $S = \frac{1}{2}a\cdot t^2$, de donde :

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3m}{1{,}96\ \mathrm{m/s^2}}} = 1{,}75\ \mathrm{s}$$

3.6.- Fuerzas de Rozamiento.

Fuerza de rozamiento es toda fuerza opuesta al movimiento, la cual se manifiesta en la superficie de contacto entre dos sólidos, siempre que uno de ellos tienda a moverse sobre el otro.

Cuando una fuerza logra mover un cuerpo y éste adquiere una aceleración, ésta no corresponde a la fuerza aplicada, sino a otra fuerza que es igual a la diferencia entre la ejercida y la de rozamiento:

$$F_{efectiva} = F_{aplicada} - F_{rozamiento}$$

Leyes del rozamiento:

- El rozamiento es independiente de la velocidad de la superficie de los cuerpos en contacto.
- El rozamiento depende de la naturaleza de los cuerpos en contacto y del grado de pulimento de sus superficies.
- La fuerza de rozamiento es proporcional a la reacción normal del plano sobre el que se desliza el cuerpo.

$$F_r = \mu \cdot N$$

Donde N representa la fuerza normal de reacción del plano y μ es un coeficiente adimensional de proporcionalidad característico de las superficies en contacto y denominado ***coeficiente de rozamiento***.

$$\mu = \frac{F_r}{N}$$

Coeficiente de rozamiento de un cuerpo sobre otro es la relación que existe entre la fuerza de rozamiento y la reacción normal del plano de deslizamiento sobre el cuerpo.

Se observa que hay que hacer más fuerza para iniciar el movimiento de un sólido (***rozamiento estático***) que para mantenerlo en movimiento una vez iniciado éste (***rozamiento dinámico***). De ahí que tengamos que distinguir dos coeficientes de rozamiento: ***Coeficiente de rozamiento estático*** y ***coeficiente de rozamiento dinámico***.

- El coeficiente de rozamiento estático μ_e es mayor que el coeficiente de rozamiento dinámico μ_d.

La fuerza de rozamiento siempre actúa en sentido contrario al movimiento del cuerpo que se desliza.

3.6.1.- Movimiento de un cuerpo sobre un plano horizontal con rozamiento.

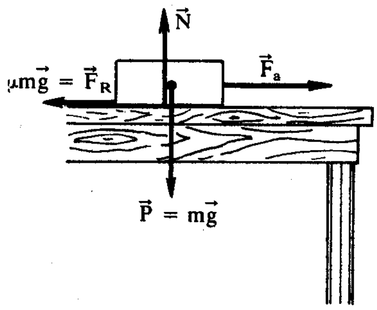
Un cuerpo en reposo sobre un plano horizontal se mantiene en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas: Su peso y la reacción normal del plano:

$$mg - N = 0$$

Si aplicamos al cuerpo una fuerza horizontal, cuyo módulo vamos incrementando partiendo de cero, observamos que el cuerpo no inicia su movimiento hasta que la fuerza aplicada no alcance un determinado valor: ello indica la existencia de una fuerza de rozamiento que se opone a que comience el movimiento y cuyo valor es igual, en todo instante, al de la fuerza aplicada.

Si continuamos aumentando el módulo de $\vec{F}_a$, llegará un movimiento en que el cuerpo comenzará a moverse, y eso sucederá cuando la fuerza de rozamiento adquiera su valor máximo:

$$F_r = \mu_e \cdot N = \mu_e \cdot m \cdot g$$



Una vez que el cuerpo esté en movimiento, la fuerza de rozamiento disminuye hasta un valor:

$$F_e = \mu_d \cdot N = \mu_d \cdot m \cdot g$$

Según lo expuesto en el apartado anterior, la fuerza efectiva será igual a:

$$F_e = F_a - F_r = F_a - \mu_d \cdot m \cdot g$$

Y aplicando la ecuación fundamental de la dinámica, podemos deducir la aceleración con que se mueve el móvil:

$$F_a - \mu_d \cdot mg = ma$$

Y por lo tanto:

$$\boxed{a = \frac{F_a - \mu_d \cdot mg}{m}}$$

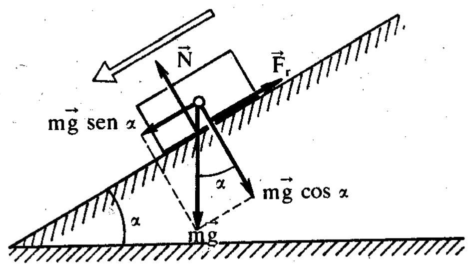
3.6.2.- Movimiento de caída de un cuerpo por un plano inclinado con rozamiento:

E n este caso la fuerza que favorece el movimiento es la componente del peso en la dirección del plano, mientras que la componente perpendicular al mismo se equilibra con la reacción normal:

$$N = m \cdot g \cdot Cos\alpha$$

La fuerza efectiva valdrá:

$$F_e = F_a - F_r = F_a - \mu_d \cdot N = mg \cdot Sen\alpha - \mu_d \cdot m \cdot g \cdot Cos\alpha$$
$$F_e = mg\left[Sen\alpha - \mu_d \cdot Cos\alpha\right]$$



Y aplicando la ecuación fundamental de la dinámica, obtenemos:

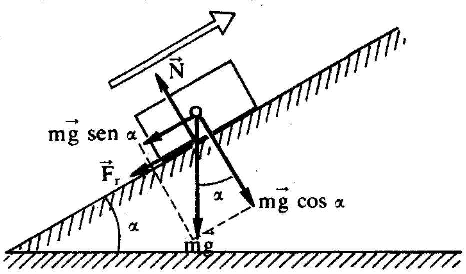
$$mg(Sen\alpha - \mu_d \cdot Cos\alpha) = m \cdot a$$

De donde:

$$\boxed{a = g\left(Sen\alpha - \mu_d \cdot Cos\alpha\right)}$$

3.6.4.- Movimiento de ascenso de un cuerpo por un plano inclinado con rozamiento:

Cuando un cuerpo sube por un plano inclinado, tras haberle aplicado una fuerza instantánea inicial, tenemos:



Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica:

$$-m \cdot g \cdot Sen\alpha - F_r = m \cdot a \quad ; \quad -m \cdot g \cdot Sen\alpha - \mu_d \cdot m \cdot g \cdot Cos\alpha = m \cdot a$$

De donde:

$$\boxed{a = -g\left[Sen\alpha + \mu_d \cdot Cos\alpha\right]}$$

3.6.5.- Determinación experimental del coeficiente de rozamiento:

Se coloca un cuerpo sobre un plano inclinado de pendiente variable, y a partir de la horizontal, se va aumentando poco a poco el ángulo de inclinación hasta conseguir que el cuerpo deslice con movimiento uniforme.

En este caso, la aceleración de caída es nula y podemos expresar:

$$a = g(Sen\alpha - \mu_d \cdot Cos\alpha) = 0$$

De donde:

$$\boxed{\mu_d = \frac{Sen\alpha}{Cos\alpha} = \tan\alpha}$$

> El ***coeficiente de rozamiento dinámico*** μ_d entre dos superficies viene dado por la tangente del ángulo mínimo necesario para que el cuerpo deslice con ***movimiento uniforme***.

Para iniciar el movimiento es necesario una inclinación mayor del plano, correspondiente al coeficiente de rozamiento estático.

$$\boxed{\mu_e = \tan\alpha'}$$

> El ***coeficiente de rozamiento estático*** μ_e entre dos superficies viene dado por la tangente del ángulo mínimo necesario para iniciar el deslizamiento.

3.7.- Impulso mecánico y momento lineal

Cuanto mayor sea el tiempo que una fuerza actúa sobre un cuerpo, éste adquirirá mayor velocidad. Por tanto, la variación de velocidad no solo depende del valor de la fuerza, sino también del tiempo durante el cual actúa.

Si en la ecuación de la fuerza $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, tenemos en cuenta que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, resulta que: $\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$, de donde $\vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{v} = d(m \cdot \vec{v})$.

Si integramos el primer miembro entre los límites t_o y t, y el segundo entre v_o y v, se obtiene:

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_o}^{t} \vec{F} \cdot dt = \int_{v_o}^{v} d(m \cdot \vec{v}) = m \cdot \vec{v} - m \cdot \vec{v}_o = \vec{p} - \vec{p}_o = \Delta \vec{p}}$$

Donde $\vec{I}$ es una magnitud física llamada ***impulso mecánico***, que en el caso de que la fuerza sea independiente del tiempo tiene el valor:

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F} \cdot (t - t_o)}$$

La magnitud vectorial $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, producto de la masa del móvil por su velocidad recibe el nombre de ***momento lineal*** o ***cantidad de movimiento***.

- ✓ ***Impulso mecánico*** $\vec{I}$, de una fuerza que actúa sobre un cuerpo es una magnitud vectorial de la misma dirección y sentido que la fuerza y cuyo valor es el producto de la intensidad de la fuerza por el tiempo que dura su actuación.
- ✓ ***Momento lineal*** o ***cantidad de movimiento*** $\vec{p}$ de un móvil es una magnitud vectorial de la misma dirección y sentido que la velocidad y cuyo valor es igual al producto de la masa del móvil por su velocidad.

3.7.1.- Teorema del impulso mecánico:

La expresión $\vec{I} = \Delta \vec{p}$ significa que el impulso mecánico de una fuerza es igual a la variación del momento lineal del cuerpo sobre el que actúa.

Si sobre un cuerpo de masa m, inicialmente en reposo, actúa una fuerza F durante un tiempo t, la velocidad final que adquiere será:

$$\vec{v} = \frac{\vec{F} \cdot t}{m}$$

De donde se deduce que se puede obtener la misma velocidad actuando durante un tiempo muy largo una fuerza pequeña que una fuerza intensa actuando un tiempo muy breve. En este último caso se habla de choques.

Como $\vec{I} = m \cdot \vec{v} - m \cdot \vec{v}_o$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_o + \frac{\vec{I}}{m}$, se obtiene por integración: $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o \cdot t + \frac{1}{m} \int_{t_o}^{t} \vec{I} \cdot dt$

Siendo $\vec{r}_o$ el vector de posición de la partícula en el instante t_o y $\vec{r}$ el vector de posición en el instante t.

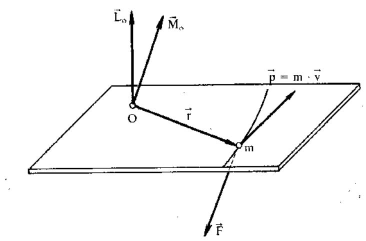
3.7.2.- Principio de conservación del momento lineal

Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, su momento lineal permanece constante.

Si $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ =0, se ha de cumplir que $\vec{p}$ =cte.

3.8.- Momento angular o cinético de una partícula

Momento angular o cinético $\vec{L}_o$ de un móvil respecto de O es el producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ de dicho móvil por su momento lineal $\vec{p}$.



$$\vec{L}_o = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m \cdot \vec{v} = m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

3.8.1.- Teorema del momento angular.

La derivada con relación al tiempo del momento angular de un móvil respecto a un punto material es igual al momento respecto del mismo punto de la fuerza total que actúa sobre el móvil.

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o}$$

En efecto, si derivamos con respecto a t la expresión $\vec{L}_o = \vec{r} \wedge m\vec{v}$, obtenemos:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Como $\vec{v}$ y $m\vec{v}$ son vectores de la misma dirección, su producto vectorial es nulo, y como $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$, entonces obtenemos:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_o}$$

3.8.2.- Principio de conservación del momento angular.

Si el momento total de las fuerzas que actúan sobre un punto material es nulo, el momento angular permanece constante.

Si $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_o = 0$, entonces tenemos que: $\vec{L}_o = Cte.$

3.9.- Problemas

1.- Se aplica una fuerza constante de 25 N a un cuerpo de 5 kg de masa inicialmente en reposo. ¿Qué velocidad alcanzará y qué espacio habrá recorrido al cabo de 10 segundos?

2.- ¿Qué fuerza han de ejercer los frenos de un coche de masa 600 kg, que marcha con una velocidad de 54 km/h para detenerlo en 30 m?

3.- Con una fuerza de 200 N se eleva un cuerpo 20 metros en 20 segundos. Calcúlese el peso de dicho cuerpo.

4.- Un cuerpo está situado sobre la superficie perfectamente lisa de un plano inclinado de α grados de inclinación. ¿Qué aceleración horizontal debemos comunicar al plano para que el cuerpo no deslice hacia abajo?.

5.- En el interior de una cabina de un ascensor de 2,8 metros de altura, se encuentra una persona de 75 kg.

a) Calcular la fuerza que soporta el suelo del ascensor cuando sube con una aceleración cte de 1,4 m/s^2.

b) Calcular dicha fuerza si el ascensor desciende con esa misma aceleración.

c) Idem. En el caso de que el ascensor suba o baje con v=Cte.

d) Cuando el ascensor está a 18 m del suelo se despende una de las lámparas del techo. Calcular en el caso que de que ascensor esté subiendo con a=1,4m/s^2 el tiempo que tardará la lámpara en chocar con el suelo.

6.- En los extremos de una maquina de Atwood, se colocan dos bloques de masa 10 kg. Si queremos que uno de los dos bloques recorra en sentido descendente una distancia de 2,40 m en 2 segundos partiendo del reposo, ¿Qué sobrecarga se le habrá que añadir?.

7.- Sobre una superficie horizontal sin rozamiento tenemos dos bloques A y B de 2 kg de masa unidos por una cuerda. Si se tira del bloque A con una fuerza de 10 N, calcular la tensión de la cuerda de unión en cada uno de sus extremos.

a) Si su masa es despreciable.

b) Si tiene una masa de 200 gr.

8.- ¿Para qué sirven los dibujos que llevan los neumáticos de los coches?

9.- Calcular el valor mínimo del radio que puede tener una curva de una carretera de ángulo de peralte α, para que un automóvil que la recorre a la velocidad v no se deslice hacia el exterior, siendo μ el coeficiente de rozamiento dinámico.

10.- Se ejerce una fuerza de 12N en dirección horizontal contra un bloque A de 4kg el cual empuja a otro bloque B de 2kg. Calcular la aceleración del sistema y la fuerza que ejerce cada bloque sobre el otro:

a) Si ambos bloques se encuentran sobre una superficie lisa.

b) Si los coeficientes de rozamiento dinámico entre los bloques A y B y la superficie son respectivamente 0,1 y 0,2.

11.- Un bloque de 100 gr que descansa sobre otro de 900 gr, y son arrastrados en conjunto con velocidad cte sobre una superficie horizontal, debido a la acción de un cuerpo de 100 gr que cuelga suspendido de un hilo a través de una polea sin masa.

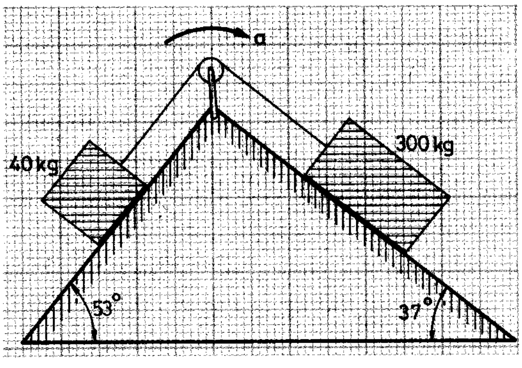
a) Si el primer bloque lo separamos del de 900 gr y lo unimos al bloque suspendido mediante otra cuerda, el sistema adquiere cierta aceleración. Calcular esta aceleración.

b) ¿Cuál es la tensión de las dos cuerdas?.

12.- Tenemos un bloque de 10 kg de masa que se puede mover con velocidad constante sobre una superficie horizontal bajo la acción de una fuerza, también horizontal, de 19,6N.

Si inclinamos dicha superficie de manera que forme un ángulo de 45° con la horizontal, ¿Qué fuerza paralela al plano necesitamos aplicar para que el bloque se deslice hacia arriba con una aceleración de 2m/s^2?.

13.- Un cuerpo de 100 kg se mueve sobre una superficie horizontal bajo la acción de una fuerza de 10º kp que forma un ángulo de -37° por debajo de la horizontal. $\mu_d = 0{,}25$. Calcular la aceleración con que se mueve el cuerpo.



14.- Dos bloques de 300 kg y de 40 kg descansan sobre dos planos inclinados, tal como se ve en la figura. Están unidos por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea sin rozamiento. El coeficiente de rozamiento entre los bloques y el plano es 0,3. Calcular:

a) La aceleración del sistema

b) La tensión de la cuerda.

Tema IV: Dinámica de Sistemas

4.1.- Sistemas de partículas:

Un sistema de partículas es un conjunto de puntos materiales que interaccionan entre sí, mediante fuerzas gravitatorias, electromagnéticas o nucleares.

Si el número de partículas que lo integran es finito, el sistema se llama ***discreto***, mientras que si dicho número es infinito, el sistema recibe el nombre de ***continuo***.

Cuando la distancia mutua entre partículas es invariable, dicho sistema recibe el nombre de ***sólido rígido***, mientras que si esa distancia es variable, el sistema se llama ***deformable***.

Un sistema de partículas es ***abierto*** si sobre él actúan otro u otros cuerpos que se consideran exteriores al mismo. Por el contrario, aquellos sistemas cuyas partículas actúan entre sí, pero no con otros cuerpos exteriores reciben el nombre de sistemas ***cerrados o aislados.***

4.2.- Sistemas Cerrados de dos partículas

Son los sistemas cerrados más sencillos. Si designamos por 1 y 2 las dos partículas que interaccionan entre sí, tenemos que, como $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (principio de acción y reacción):

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Como $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$, podemos escribir la ecuación anterior de la forma siguiente:

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = 0$$

De donde:

$$\boxed{\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = Cte.}$$

En un sistema cerrado integrado por dos partículas el momento lineal total permanece cte.

4.2.1.- Aplicaciones:

a) Retroceso de las armas de fuego:

Al disparar un arma el proyectil sale con una velocidad muy grande, a la vez que el arma retrocede. Sean m y M las masas respectivas del proyectil y del arma y v y V sus velocidades después del disparo. Aplicando el principio de conservación del momento lineal, resulta: $0 = m \cdot v + M \cdot V$

De donde $V = \frac{-m}{M} \cdot v$

El arma retrocede en sentido contrario al movimiento del proyectil.

Ejemplo 1: **¿Con qué velocidad retrocede un fusil de masa 5kg. Que dispara un proyectil de 10 g con una velocidad de 200 m/s?.**

Utilizando la ecuación anterior tenemos que: $V = -\frac{m}{M} \cdot v = -\frac{0,01Kg}{5Kg} \cdot 200 m/s = -0,4 m/s$

b) Propulsión a chorro:

Al principio el momento lineal del cohete es nulo; más adelante, como los gases son expulsados hacia abajo, el cohete es impulsado en sentido contrario, y, como el momento lineal total tiene que seguir siendo nulo, se cumplirá:

$$V = -\frac{m}{M} \cdot v$$

Siendo ***M*** y ***V*** la masa y velocidad del cohete y ***m*** y ***v*** la masa y velocidad de los gases expulsados.

Si M es la masa del cohete mas el combustible y m la del combustible desprendido con una velocidad v respecto al cohete, designamos por ***a*** la aceleración que el cohete adquiere en un tiempo t muy pequeño, el momento lineal inicial del cohete es $M\cdot V_o$, y al cabo de un tiempo t será $(M-m)\cdot(V_o+at)$ y el de los gases $m(V_o+at-v)$. Por tanto, de acuerdo con el principio de conservación del momento lineal, tendremos:

$$M\cdot V_o = (M-m)\cdot(V_o+at)+m(V_o+at-v)$$

De donde

$$\boxed{a=\frac{m}{t}\cdot\frac{1}{M}v}$$

Ejemplo 2: Se lanza un cohete de masa inicial m_o de forma que la velocidad del chorro gaseoso expulsado sea cte. Y de valor v con respecto al cohete. Considerando la tierra como sistema de referencia inercial, suponiendo que la trayectoria del cohete sea vertical con un valor de la aceleración de la gravedad cte. Y despreciando la resistencia del aire, calcular la velocidad V del cohete respecto a la tierra al cabo de un tiempo t. (Supóngase cte la cantidad de gases expulsados por unidad de tiempo, dm/dt=Cte.)

Sean m y V la masa y velocidad del cohete en un instante t. Al cabo de un tiempo dt, la masa y la velocidad del cohete habrán variado, y por consiguiente su momento lineal, siendo tal variación d(mV) hacia arriba. El momento lineal de los gases expulsados habrá variado en dm(v-V). Aplicando el principio de conservación del momento lineal, tenemos:

$$d(mV)+dm(v-V)=0$$

Desarrollando esta expresión y simplificando:

$$m\cdot dV + v\cdot dm = 0$$

De donde:

$$dV = -v\cdot\frac{dm}{m}$$

Integrando entre el instante inicial ($t = 0, V=0, m=m_o$) y t, tenemos:

$$V=\int_{t_o}^{t} -v\cdot\frac{dm}{m} = -v[Lm]_{m_o}^{m} = v\cdot L\frac{m_o}{m}$$

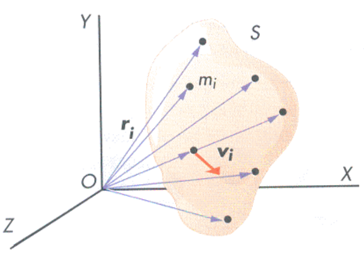
4.3.- Centro de masas:

Cuando un cuerpo está sometido a un movimiento de traslación, cada uno de sus puntos, a medida que va trascurriendo el tiempo, experimenta los mismos desplazamientos que los demás, de tal forma que el movimiento de una partícula se puede considerar como una representación del movimiento de todo el cuerpo.

Sin embargo, en el caso de que el cuerpo, además del movimiento de traslación tenga otro de rotación, el desplazamiento será diferente para los distintos puntos materiales que lo constituyen. Existe, no obstante un punto del cuerpo que se mueve de la misma forma que si el cuerpo en cuestión solo experimentara un movimiento de traslación. Este punto recibe el nombre de centro de masas, y su movimiento es el de traslación del cuerpo considerado.

En un tratamiento de sistemas de masas puntuales el **centro de masas** es el punto donde se supone concentrada toda la masa del sistema.

4.3.1.- Coordenadas del centro de masas:



Supongamos un sistema integrado por n partículas de masas m_1, m_2, …,m_n, cuyas posiciones respecto a un sistema fijo de coordenadas rectangulares vienen dadas por los vectores de posición $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,......,\vec{r}_n$, respectivamente. Consideremos, además que el sistema cumple la ***ley de conservación de la masa***, de forma que $\sum m_i = M$, siendo M la masa total del sistema.

Se llama centro de masas (CM) del sistema a un punto del espacio tal que su vector de posición

$$\vec{r}_o = x_o\hat{i} + y_o\hat{j} + z_o\hat{k}$$

Cumpla la condición:

$$M\cdot\vec{r}_o = \sum m_i\cdot\vec{r}_i$$

De donde:

$$\boxed{\vec{r}_o = \frac{1}{M}\sum m_i\cdot\vec{r}_i}$$

Ecuación vectorial equivalente a las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$x_o = \frac{1}{M}\sum m_i\cdot x_i \qquad y_o = \frac{1}{M}\sum m_i\cdot y_i \qquad z_o = \frac{1}{M}\sum m_i\cdot z_i$$

Si tomamos como origen de coordenadas el centro de masas:

$$\sum m_i\cdot\vec{r}_i = 0 \qquad \sum m_i\cdot x_i = 0 \qquad \sum m_i\cdot y_i = 0 \qquad \sum m_i\cdot z_i = 0$$

En el caso de que el sistema de partículas sea un sólido rígido, lo podemos considerara como una distribución continua de masa, y para hallar la posición de su centrote masas lo hemos de descomponer en infinitos puntos de masa infinitesimal, dm, y de esta forma los sumatorios se transforman en integrales:

$$\vec{r}_o = \frac{1}{M}\int \vec{r}\cdot dm \qquad x_o = \frac{1}{M}\int x\cdot dm \qquad y_o = \frac{1}{M}\int y\cdot dm \qquad z_o = \frac{1}{M}\int z\cdot dm$$

Cuando el origen de coordenadas sea el centro de masas:

$$\int \vec{r}\cdot dm = 0 \qquad \int x\cdot dm = 0 \qquad \int y\cdot dm = 0 \qquad \int z\cdot dm = 0$$

No se debe confundir el centro de masas con el centro de gravedad, ya que éste es el punto de aplicación del peso de sus partículas. No obstante, ambos centros coinciden en el caso de que la aceleración de la gravedad sea la misma para todas las partes del sistema, lo cual sucede cuando el tamaño del cuerpo es reducido.

Si el sólido es homogéneo:

Cúbico	$x_o = \frac{1}{V}\int x\cdot dV\ ;\quad y_o = \frac{1}{V}\int y\cdot dV\ ;\quad z_0 = \frac{1}{V}\int z\cdot dV$
Laminar	$x_o = \frac{1}{S}\int x\cdot dS\ ;\quad y_o = \frac{1}{S}\int y\cdot dS\ ;\quad z_0 = \frac{1}{S}\int z\cdot dS$
Lineal	$x_o = \frac{1}{L}\int x\cdot dL\ ;\quad y_o = \frac{1}{L}\int y\cdot dL\ ;\quad z_0 = \frac{1}{L}\int z\cdot dL$

4.3.2.- Movimiento del centro de masas:

Sea un sistema formado por n partículas, de masas respectivas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, y cuya masa total M, permanece constante con el tiempo. Para este sistema se cumple:

$$M\cdot\vec{r}_o = \sum m_i\cdot\vec{r}_i$$

Derivando con respecto a t:

$$M\cdot\frac{d\vec{r}_o}{dt} = \sum m_i\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Es decir:

$$M\cdot\vec{V}_{CM} = \sum m_i\cdot\vec{v}_i$$

Donde $\vec{V}_{CM}$ es la velocidad del centro de masas y $\vec{v}_i$ la de la partícula m_i.

Esta ecuación la podemos escribir introduciendo el momento lineal como:

$$\boxed{\vec{P} = \vec{P}_{CM} = \sum \vec{p}_i}$$

El momento lineal total del sistema, que se puede considerar como el momento lineal de su centro de masas, es igual a la suma de los momentos lineales de sus partículas correspondientes.

Derivando de nuevo con respecto a t; tenemos:

$$M \cdot \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \sum m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

Es decir:

$$\boxed{M \cdot \vec{A}_{CM} = \sum m_i \cdot \vec{a}_i}$$

Donde $\vec{A}_{CM}$ es la aceleración del centro de masas y $\vec{a}_i$ la de la partícula m_i. Teniendo en cuanta que $\sum m_i \cdot \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i^E$, se obtiene finalmente:

$$\boxed{\sum \vec{F}_i^E = M \cdot \vec{A}_{CM}}$$

El centro de masas del sistema de partículas se mueve como si toda la masa del sistema estuviera concentrada en él y sobre él actuasen todas las fuerzas que realmente actúan sobre el sistema.

4.4.- Impulso y momento lineal de un sistema de partículas:

Para un sistema de partículas el ***impulso total*** es el la suma de los impulsos experimentados por cada una de las partículas, a causa de las fuerzas exteriores al sistema:

$$\vec{I} = \sum \vec{I}_i$$

El impulso total comunicado a un sistema es igual a la variación de su momento lineal.

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p}}$$

4.4.1.- Principio de Conservación del momento lineal de un sistema.

En un sistema cerrado el momento lineal total permanece constante a lo largo del tiempo.

Ya que en este caso, $\vec{P} = M \cdot \vec{V}_{CM} = Cte.$, resulta que $\vec{V}_{CM} = Cte.$

4.5.- Sistema de referencia del centro de masas:

Ya hemos visto en el apartado anterior que el centro de masas de un sistema cerrado se mueve con velocidad constante respecto a un sistema de referencia inercial. Si el origen de este sistema de referencia lo fijamos en el centro de masas del sistema, es evidente que dicho centro de masas estará en reposo ($\vec{V}_{CM} = 0$). Este es el llamado ***sistema de referencia del centro de masas***. Por consiguiente, como $\vec{P}_{CM} = M \cdot \vec{V}_{CM}$, resulta:

$$\boxed{\vec{P}_{CM} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \cdot \vec{v}_i = 0}$$

El momento lineal total de un sistema cerrado de partículas referido al centro de masas es siempre nulo.

En un sistema cerrado de dos partículas los momentos lineales de ambas respecto a un sistema de referencia del centro de masas son iguales y opuestos, siendo el momento lineal total

4.6.- Momento angular total de un sistema de partículas:

Para un sistema aislado (fuerzas externas nulas), el momento angular permanece constante.

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum (\vec{r}_i \wedge m_i \cdot v_i)$$

Si estamos en el caso de un sólido rígido;

$$\vec{L} = \int (\vec{r} \wedge \vec{v}) dm$$

***Ejemplo 3**: Un sistema está constituido por dos partículas de masas respectivas m_1=3kg y m_2=5kg. En un instante determinado sus vectores de posición y velocidades correspondientes son:*

$$\vec{r}_1 = 4\hat{i} - 2\hat{k} \qquad \vec{v}_1 = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{r}_2 = -4\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k} \qquad \vec{v}_2 = 2\hat{i} + 2\hat{j}$$

Hallar el momento angular del sistema en ese mismo instante, respecto a su centro de masas.

Como el vector de posición y la velocidad del centro de masas son:

$$\vec{r}_o = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{M} = \frac{3kg(4\hat{i} - 2\hat{k}) + 5kg(-4\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k})}{8kg} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{v}_i}{M} = \frac{3kg(2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) + 5kg(2\hat{i} + 2\hat{j})}{8kg} = 2\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{3}{2}\hat{k}$$

Los vectores de posición y las velocidades de cada una de las partículas con respecto al sistema de referencia del centro de masas son:

$$\vec{r}_1^{\,'} = \vec{r}_1 - \vec{r}_o = 4\hat{i} - 2\hat{k} - (-\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 5\hat{i} - 5\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$\vec{r}_2^{\,'} = \vec{r}_2 - \vec{r}_o = -4\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k} - (-\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = -3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{v}_1^{\,'} = \vec{v}_1 - \vec{V}_{CM} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} - (2\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{3}{2}\hat{k}) = -\frac{5}{2}\hat{j} + \frac{5}{2}\hat{k}$$

$$\vec{v}_2^{\,'} = \vec{v}_2 - \vec{V}_{CM} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - (2\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{3}{2}\hat{k}) = \frac{3}{2}\hat{j} - \frac{3}{2}\hat{k}$$

Calculamos ahora los momentos angulares de las dos partículas respecto al centro de masas del sistema:

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1^{\,'} \wedge m_1 \cdot \vec{v}_1^{\,'} = 3kg \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -5 & -5 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = -75\hat{i} - \frac{75}{2}\hat{j} - \frac{75}{2}\hat{k}$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2^{\,'} \wedge m_2 \cdot \vec{v}_2^{\,'} = 5kg \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -45\hat{i} - \frac{45}{2}\hat{j} - \frac{45}{2}\hat{k}$$

El momento angular total, también con respecto al centro de masas, será:

$$\vec{L}' = \vec{L}'_1 + \vec{L}'_2 = -120\hat{i} - 60\hat{j} - 60\hat{k}$$

4.7.- Problemas:

1.- Dos partículas de 2 y 3 kg. De masa están situadas en los puntos de coordenadas (2,1) y (-3,1)m, referidos a cierto observador O. La primera se mueve con una velocidad de 10 m/s a lo largo del eje X, y la segunda, a 8 m/s en una dirección que forma un ángulo de 120° con el eje X.
Calcular:

a) La posición del centro de masas.
b) La posición de cada partícula respecto al centro de masas.
c) La velocidad con que se mueve el centro de masas.
d) La velocidad de cada partícula respecto a centro de masas. Comprueba que la cantidad de movimiento total del sistema con respecto al centro de masas es nula.

2.- Un sistema de partículas está formado por dos masas puntuales m_1=2kg. Y m_2=3kg que se mueven respectivamente según las ecuaciones $\vec{r}_1 = 2t^2\hat{i}$ m y $\vec{r}_2 = 2(t+1)\hat{j}$ m donde t se mide en segundos. Calcular:

a) El momento lineal total del sistema.
b) La fuerza que actúa sobre cada partícula.

3.- Se dispone horizontalmente un proyectil de 8 gr. Y penetra en un bloque de madera de 9 kg. Que puede moverse libremente. La velocidad del sistema formado por el bloque y el proyectil después del impacto es de 30 cm/s. Deducir la velocidad inicial del proyectil.

4.- Las velocidades de dos partículas de masas m_1 y m_2 son respectivamente v_1 y v_2, respecto a un sistema de referencia determinado. Calcular la velocidad del centro de masas respecto a ese mismo sistema y la velocidad de cada una de las partículas respecto al centro de masas.

5.- Un sistema está constituido por dos partículas de masas m_1=3kg. Y m_2=5kg. En un instante determinado sus correspondientes vectores de posición y velocidad son: $\begin{cases} \vec{r}_1 = 4i - 2k \\ \vec{r}_2 = -4i + 8j + 6k \\ \vec{v}_1 = 2i - 2j + 4k \\ \vec{v}_2 = 2i + 2j \end{cases}$.
Calcular el momento angular del sistema en ese mismo instante respecto a su centro de masas.

6.- Un Vagón de masa M se desliza sin rozamiento sobre una vía horizontal. En el momento en que su velocidad es V_o, un hombre de masa m comienza a caminar sobre el vagón, de delante hacia atrás siendo su velocidad respecto al vagón en el momento que lo abandona, V. ¿Cuál será la velocidad del vagón en ese momento?

7.- Un hombre de masa M salta desde una lancha de masa M_1 a la orilla de un río, tomando impulso para conseguir una velocidad c. La lancha retrocede, pero tiene que vencer la resistencia del agua $R = a\cdot v^2$ (siendo a una cte. y v la velocidad variable de la lancha). Determinar la velocidad inicial, v_o, de la lancha en el instante del salto y la que tendrá tras haber transcurrido un tiempo t.

8.- Un cañón de masa M, situado sobre el suelo horizontal, dispara horizontalmente un proyectil de masa m con la velocidad relativa v. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico entre el cañón y el suelo es μ, determinar el retroceso X, del cañón.

9.- Un cañón montado sobre ruedas pesa 100 toneladas y dispara proyectiles de 10 kg. a 300 m/s. Determinar el impulso que se ejerce sobre el cañón y su cantidad de movimiento.