Modelo 2014. Pregunta 5B.-

a) Determine la masa y la cantidad de movimiento de un protón cuando se mueve con una velocidad de $2,70\times10^{8}$ m s^{-1}.

b) Calcule el aumento de energía necesario para que el protón del apartado anterior cambie su velocidad de v_1 = $2,70\times10^{8}$ m s^{-1} a v_2 = $2,85\times10^{8}$ m s^{-1}.

Datos: Masa del protón en reposo = $1,67\times10^{-27}$ kg; Velocidad de la luz en el vacío= 3×10^{8} m s^{-1}

Solución.

a. Según la teoría de la Relatividad la masa no es un invariante, y depende de la velocidad según la ecuación:

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\qquad m_o\equiv\text{masa en reposo}\qquad m=\frac{1,67\times10^{-27}}{\sqrt{1-\frac{\left(2,70\times10^{8}\right)^2}{\left(3\times10^{8}\right)^2}}}=3,83\times10^{-27}\,\text{kg}$$

Conocida la masa en movimiento se calcula la cantidad de movimiento. El módulo de la cantidad de movimiento es:

$$p=m\cdot v=3,83\times10^{-27}\cdot2,70\times10^{8}=1,03\times10^{-18}\,\text{kg m s}^{-1}$$

b. $\Delta E=E_2-E_1$, siendo E_2 la energía del protón a la velocidad v_2 y E_1 a la velocidad v_1.

Según la teoría de la Relatividad de Einstein la equivalencia masa-energía se representa por la ecuación $E=m\,c^2$. Aplicando al incremento que se pide:

$$\Delta E=E_2-E_1=m_2\,c^2-m_1\,c^2=\left(m_2-m_1\right)\cdot c^2$$

Aplicando a cada masa la corrección de la velocidad:

$$\Delta E=\left(m_2-m_1\right)\cdot c^2=\left(\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}-\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}\right)\cdot c^2=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}\right)\cdot m_o c^2$$

$$\Delta E=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(2,85\times10^{8}\right)^2}{\left(3\times10^{8}\right)^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(2,70\times10^{8}\right)^2}{\left(3\times10^{8}\right)^2}}}\right)\cdot1,67\times10^{-27}\cdot\left(3\times10^{8}\right)^2=1,37\times10^{-10}\,\text{J}$$

Septiembre 2013. Pregunta 4B.-

a) Calcule la longitud de onda de un fotón que posea la misma energía que un electrón en reposo.

b) Calcule la frecuencia de dicho fotón y, a la vista de la tabla, indique a qué tipo de radiación correspondería.

Ultravioleta	Entre $7,5\times10^{14}$ Hz y 3×10^{17} Hz
Rayos-X	Entre 3×10^{17} Hz y 3×10^{19} Hz
Rayos gamma	Más de 3×10^{19} Hz

Datos: Masa del electrón, m_e = $9,11\times10^{-31}$ kg; Constante de Planck, h = $6,63\times10^{-34}$ J s;
Velocidad de la luz en el vacío, c = $3,00\times10^{8}$ m s^{-1}.

Solución.

a. La energía de un electrón en reposo se obtiene mediante la ecuación de Einstein para la equivalencia masa-energía.

$$E_o=m_o\cdot c^2=9,11\times10^{-31}\cdot\left(3,00\times10^{8}\right)^2=8,199\times10^{-14}\,\text{J}$$

Siendo m_o la masa del electrón en reposo

La longitud de onda de un fotón, conocida su energía, se obtiene mediante la ecuación de Planck

$$\left.\begin{array}{l} E = h\cdot\nu \\ \nu = \dfrac{c}{\lambda} \end{array}\right\} : E = h\cdot\frac{c}{\lambda} \qquad \left.\begin{array}{l} E = h\cdot\dfrac{c}{\lambda} \\ E = E_o = m_o\cdot c^2 \end{array}\right\} : m_o\cdot c^2 = h\cdot\frac{c}{\lambda} \qquad \lambda = \frac{h}{m_o\cdot c}$$

$$\lambda = \frac{6{,}63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{9{,}11\times10^{-31}\,\mathrm{Kg}\cdot 3{,}00\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}} = 2{,}43\times10^{-12}\,\mathrm{m}$$

b. $\nu = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3{,}00\times10^{8}}{2{,}43\times10^{-12}} = 1{,}24\times10^{20}\,\mathrm{Hz}$

El fotón corresponde a una radiación de rayos gamma.

Junio 2012. Pregunta 5B.- Una partícula de 1 mg de masa en reposo es acelerada desde el reposo hasta que alcanza una velocidad v = 0,6 c, siendo c la velocidad de la luz en el vacío. Determine:

a) La masa de la partícula cuando se mueve a la velocidad v.

b) La energía que ha sido necesario suministrar a la partícula para que ésta alcance dicha velocidad v.

Dató: Velocidad de la luz en el vacío. $c = 3\times10^{8}$ m s^{-1}.

Solución.

a. Según la teoría de la relatividad, las magnitudes masa longitud y tiempo no son iguales si la partícula esta en reposo o con movimiento.

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Donde m_o es la masa en reposo, m la masa en movimiento, c la velocidad de la luz y v la velocidad de la partícula.

$$m = \frac{10^{-6}}{\sqrt{1-\dfrac{(0{,}6\,c)^2}{c^2}}} = \frac{10^{-6}}{\sqrt{1-0{,}36}} = \frac{10^{\acute{}6}}{0{,}8} = 1{,}25\times10^{-6}\,\mathrm{kg}$$

b. Partiendo de la relación entre la masa en reposo y la masa en movimiento, y multiplicando los dos miembros de la igualdad por un medio de la velocidad de la luz al cuadrado, se llega a una relación entre la energía en reposo y la energía en movimiento.

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad \frac{1}{2}mc^2 = \frac{\frac{1}{2}m_o c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad E = \frac{E_o}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \frac{E_o}{\sqrt{1-\dfrac{(0{,}6\,c)^2}{c^2}}} = \frac{E_o}{\sqrt{1-0{,}36}} = \frac{E_o}{0{,}8}$$

$$\Delta E = E - E_o = \frac{E_o}{0{,}8} - E_o = E_o\left(\frac{1}{0{,}8}-1\right) = 0{,}25E_o = 0{,}25\cdot m_o c^2 = 0{,}25\cdot10^{-6}\cdot\left(3\times10^{8}\right)^2 = 2{,}25\times10^{10}\,\mathrm{J}$$

Septiembre 2009. Cuestión 5.- La energía en reposo de un electrón es 0,511 MeV. Si el electrón se mueve con una velocidad v = 0,8 c, siendo c la velocidad de la luz en el vacío:

a) ¿Cuál es la masa relativista del electrón para esta velocidad?

b) ¿Cuál es la energía relativista total?

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón $e = 1{,}6\times10^{-19}$ C

Velocidad de la luz en el vacío $c = 3\times10^{8}$ m/s

Solución.

a. Según la teorema de la relatividad, la masa de una partícula en movimiento es:

$m = \dfrac{m_o}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ Donde m_o representa la masa de la partícula en reposo.

Para calcular la masa en reposo del electrón se utiliza el dato de la energía del electrón en reposo (0,511 MeV).

$$E = m\cdot c^2 \;:\; m_o = \frac{E_o}{c^2} = \frac{0{,}511\,\text{MeV}\cdot 10^6\,\frac{\text{eV}}{\text{MeV}}\cdot 1{,}6\times10^{-19}\,\frac{\text{J}}{\text{eV}}}{\left(3\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 9{,}08\times10^{-31}\,\text{kg}$$

Conocida la masa en reposo, se calcula la masa a la velocidad del enunciado.

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}08\times10^{-31}}{\sqrt{1-\frac{(0{,}8c)^2}{c^2}}} = \frac{9{,}08\times10^{-31}}{\sqrt{1-0{,}64}} = 1{,}51\times10^{-30}\,\text{kg}$$

b. Según la teoría de la relatividad:

$$E = m\cdot c^2 = 1{,}51\times10^{-30}\cdot\left(3\times10^8\right)^2 = 1{,}359\times10^{-13}\,\text{J}$$

$$E = 1{,}359\times10^{-13}\,\text{J}\cdot\frac{1}{1{,}6\times10^{-19}\,\frac{\text{J}}{\text{eV}}}\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{MeV}}{\text{eV}} = 0{,}849\,\text{MeV}$$

Junio 2008. Cuestión 5.

Justifique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, según la teoría de la relatividad especial:

a) La masa de un cuerpo con velocidad v respecto de un observador es menor que su masa en reposo.

b) La energía de enlace del núcleo atómico es proporcional al defecto de masa nuclear Δm.

Solución.

a. Falso. La masa aumenta al aumentar la velocidad según la ecuación

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde m es la masa en movimiento, m_o la masa en reposo y c la velocidad de la luz.

b. Verdadero. $\Delta E = \Delta m\cdot c^2$ Energía liberada cuando se unen nucleones para formar un núcleo.

Junio 2002. Cuestión 5.

a) ¿Qué velocidad ha de tener un electrón para que su longitud de onda de De Broglie sea 200 veces la correspondiente a un neutrón de energía cinética 6 e V?

b) ¿Se puede considerar que el electrón a esta velocidad es no relativista?

Datos: Masa del electrón = $9'1\times10^{-31}$kg — Masa del neutrón = $1'7\times10^{-27}$kg

Velocidad de la luz en el vacío = 3×10^{8}ms^{-1} — Masa del electrón = $1'6\times10^{-19}$C

Solución.

a. Como primer paso se calcula la longitud de onda(λ) de De Broglie correspondiente al neutrón, para luego poder compararla con la del electrón ($\lambda_e = 200\ \lambda_n$)

Si la energía cinética(E_c.) del neutrón son 6eV, equivalente a $9'6\times10^{-19}$ J (1eV = $1'6\times10^{-19}$):

$$E_c = \frac{1}{2} m_n \cdot v_n^2 = 9'6 \cdot 10^{-19}\,J$$

despejando la velocidad del Neutrón:

$$v_n = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9'6 \times 10^{-19}\,J}{1'7 \times 10^{-27}\,kg}} = 33.606,7 \left(m/_s\right)$$

La longitud de onda asociada a este neutrón, la hallamos a través de la formula de De Broglie, que asocia a una partícula con una determinada velocidad, una longitud λ según:

$$\lambda = \frac{h}{mV}$$

donde h representa la constante de Planck($h = 6'63 \times 10^{-34}$ $J \cdot s$), sustituyendo los valores:

$$\lambda_n = \frac{6'63 \times 10^{-34}}{1'7 \times 10^{-27} \cdot 33606'7} = 1'16 \times 10^{-11}\,m$$

teniendo en cuenta que $\lambda_e = 200\ \lambda_n$:

$$\lambda_e = 200 \cdot 1'16 \times 10^{-11} = 2'32 \times 10^{-9}\,m$$

y por tanto, la velocidad que ha de tener se obtiene despejando:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e \cdot v_e}$$

despejando la velocidad del electrón

$$v_e = \frac{h}{m_e \cdot \lambda_e} = \frac{6'63 \times 10^{-34}\,(J \cdot s)}{9'1 \times 10^{-31}\,(kg) \cdot 2'32 \times 10^{-9}\,(m)} = 3'14 \cdot 10^5\ m/_s$$

b. A esta velocidad el electrón es no-relativista, ya que su velocidad es del orden del 0’1 % de la velocidad de la luz.