

Modelo 2014. Pregunta 5B.-

- a) Determine la masa y la cantidad de movimiento de un protón cuando se mueve con una velocidad de $2,70 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.
- b) Calcule el aumento de energía necesario para que el protón del apartado anterior cambie su velocidad de $v_1 = 2,70 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ a $v_2 = 2,85 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Datos: Masa del protón en reposo $= 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$; Velocidad de la luz en el vacío $= 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

Solución.

- a. Según la teoría de la Relatividad la masa no es un invariante, y depende de la velocidad según la ecuación:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad m_0 \equiv \text{masa en reposo} \quad m = \frac{1,67 \times 10^{-27}}{\sqrt{1 - \frac{(2,70 \times 10^8)^2}{(3 \times 10^8)^2}}} = 3,83 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Conocida la masa en movimiento se calcula la cantidad de movimiento. El módulo de la cantidad de movimiento es:

$$p = m \cdot v = 3,83 \times 10^{-27} \cdot 2,70 \times 10^8 = 1,03 \times 10^{-18} \text{ kg m s}^{-1}$$

- b. $\Delta E = E_2 - E_1$, siendo E_2 la energía del protón a la velocidad v_2 y E_1 a la velocidad v_1 .

Según la teoría de la Relatividad de Einstein la equivalencia masa-energía se representa por la ecuación

$E = m c^2$. Aplicando al incremento que se pide:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = m_2 c^2 - m_1 c^2 = (m_2 - m_1) \cdot c^2$$

Aplicando a cada masa la corrección de la velocidad:

$$\Delta E = (m_2 - m_1) \cdot c^2 = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right) \cdot c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right) \cdot m_0 c^2$$

$$\Delta E = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(2,85 \times 10^8)^2}{(3 \times 10^8)^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(2,70 \times 10^8)^2}{(3 \times 10^8)^2}}} \right) \cdot 1,67 \times 10^{-27} \cdot (3 \times 10^8)^2 = 1,37 \times 10^{-10} \text{ J}$$

Septiembre 2013. Pregunta 4B.-

- a) Calcule la longitud de onda de un fotón que posea la misma energía que un electrón en reposo.
- b) Calcule la frecuencia de dicho fotón y, a la vista de la tabla, indique a qué tipo de radiación correspondería.

Ultravioleta	Entre $7,5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ y $3 \times 10^{17} \text{ Hz}$
Rayos-X	Entre $3 \times 10^{17} \text{ Hz}$ y $3 \times 10^{19} \text{ Hz}$
Rayos gamma	Más de $3 \times 10^{19} \text{ Hz}$

Datos: Masa del electrón, $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$; Constante de Planck, $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$; Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Solución.

- a. La energía de un electrón en reposo se obtiene mediante la ecuación de Einstein para la equivalencia masa-energía.

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 = 9,11 \times 10^{-31} \cdot (3,00 \times 10^8)^2 = 8,199 \times 10^{-14} \text{ J}$$

Siendo m_0 la masa del electrón en reposo

La longitud de onda de un fotón, conocida su energía, se obtiene mediante la ecuación de Planck

$$\left. \begin{array}{l} E = h \cdot \nu \\ \nu = \frac{c}{\lambda} \end{array} \right\} : E = h \cdot \frac{c}{\lambda} \quad \left. \begin{array}{l} E = h \cdot \frac{c}{\lambda} \\ E = E_0 = m_0 \cdot c^2 \end{array} \right\} : m_0 \cdot c^2 = h \cdot \frac{c}{\lambda} \quad \lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c}$$

$$\lambda = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{9,11 \times 10^{-31} \text{ Kg} \cdot 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m}$$

b. $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \times 10^8}{2,43 \times 10^{-12}} = 1,24 \times 10^{20} \text{ Hz}$

El fotón corresponde a una radiación de rayos gamma.

Junio 2012. Pregunta 5B.- Una partícula de 1 mg de masa en reposo es acelerada desde el reposo hasta que alcanza una velocidad $v = 0,6 c$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío. Determine:

- La masa de la partícula cuando se mueve a la velocidad v .
- La energía que ha sido necesario suministrar a la partícula para que ésta alcance dicha velocidad v .

Dató: Velocidad de la luz en el vacío. $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Solución.

a. Según la teoría de la relatividad, las magnitudes masa longitud y tiempo no son iguales si la partícula esta en reposo o con movimiento.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde m_0 es la masa en reposo, m la masa en movimiento, c la velocidad de la luz y v la velocidad de la partícula.

$$m = \frac{10^{-6}}{\sqrt{1 - \frac{(0,6c)^2}{c^2}}} = \frac{10^{-6}}{\sqrt{1 - 0,36}} = \frac{10^{-6}}{0,8} = 1,25 \times 10^{-6} \text{ kg}$$

b. Partiendo de la relación entre la masa en reposo y la masa en movimiento, y multiplicando los dos miembros de la igualdad por un medio de la velocidad de la luz al cuadrado, se llega a una relación entre la energía en reposo y la energía en movimiento.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \frac{1}{2} mc^2 = \frac{\frac{1}{2} m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{(0,6c)^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - 0,36}} = \frac{E_0}{0,8}$$

$$\Delta E = E - E_0 = \frac{E_0}{0,8} - E_0 = E_0 \left(\frac{1}{0,8} - 1 \right) = 0,25 E_0 = 0,25 \cdot m_0 c^2 = 0,25 \cdot 10^{-6} \cdot (3 \times 10^8)^2 = 2,25 \times 10^{10} \text{ J}$$

Septiembre 2009. Cuestión 5.- La energía en reposo de un electrón es 0,511 MeV. Si el electrón se mueve con una velocidad $v = 0,8 c$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío:

- a) ¿Cuál es la masa relativista del electrón para esta velocidad?
 b) ¿Cuál es la energía relativista total?

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
 Velocidad de la luz en el vacío $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

Solución.

a. Según la teorema de la relatividad, la masa de una partícula en movimiento es:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ Donde } m_0 \text{ representa la masa de la partícula en reposo.}$$

Para calcular la masa en reposo del electrón se utiliza el dato de la energía del electrón en reposo (0,511 MeV).

$$E = m \cdot c^2 : m_0 = \frac{E_0}{c^2} = \frac{0,511 \text{ MeV} \cdot 10^6 \frac{\text{eV}}{\text{MeV}} \cdot 1,6 \times 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}}}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 9,08 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Conocida la masa en reposo, se calcula la masa a la velocidad del enunciado.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9,08 \times 10^{-31}}{\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}} = \frac{9,08 \times 10^{-31}}{\sqrt{1 - 0,64}} = 1,51 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

b. Según la teoría de la relatividad:

$$E = m \cdot c^2 = 1,51 \times 10^{-30} \cdot \left(3 \times 10^8\right)^2 = 1,359 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$E = 1,359 \times 10^{-13} \text{ J} \cdot \frac{1}{1,6 \times 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}}} \cdot 10^{-6} \frac{\text{MeV}}{\text{eV}} = 0,849 \text{ MeV}$$

Junio 2008. Cuestión 5.

Justifique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, según la teoría de la relatividad especial:

- a) La masa de un cuerpo con velocidad v respecto de un observador es menor que su masa en reposo.
 b) La energía de enlace del núcleo atómico es proporcional al defecto de masa nuclear Δm .

Solución.

a. Falso. La masa aumenta al aumentar la velocidad según la ecuación

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde m es la masa en movimiento, m_0 la masa en reposo y c la velocidad de la luz.

b. Verdadero. $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ Energía liberada cuando se unen nucleones para formar un núcleo.

Junio 2002. Cuestión 5.

- a) ¿Qué velocidad ha de tener un electrón para que su longitud de onda de De Broglie sea 200 veces la correspondiente a un neutrón de energía cinética 6 eV?
 b) ¿Se puede considerar que el electrón a esta velocidad es no relativista?

Datos: Masa del electrón $= 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ Masa del neutrón $= 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
 Velocidad de la luz en el vacío $= 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ Masa del electrón $= 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Solución.

a. Como primer paso se calcula la longitud de onda (λ) de De Broglie correspondiente al neutrón, para luego poder compararla con la del electrón ($\lambda_e = 200 \lambda_n$)

Si la energía cinética (E_c) del neutrón son 6eV, equivalente a $9,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ($1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$):

$$E_c = \frac{1}{2} m_n \cdot v_n^2 = 9'6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

despejando la velocidad del Neutrón:

$$v_n = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9'6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1'7 \times 10^{-27} \text{ kg}}} = 33.606,7 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

La longitud de onda asociada a este neutrón, la hallamos a través de la formula de De Broglie, que asocia a una partícula con una determinada velocidad, una longitud λ según:

$$\lambda = \frac{h}{mV}$$

donde h representa la constante de Planck ($h = 6'63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$), sustituyendo los valores:

$$\lambda_n = \frac{6'63 \times 10^{-34}}{1'7 \times 10^{-27} \cdot 33606'7} = 1'16 \times 10^{-11} \text{ m}$$

teniendo en cuenta que $\lambda_e = 200 \lambda_n$:

$$\lambda_e = 200 \cdot 1'16 \times 10^{-11} = 2'32 \times 10^{-9} \text{ m}$$

y por tanto, la velocidad que ha de tener se obtiene despejando:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e \cdot v_e}$$

despejando la velocidad del electrón

$$v_e = \frac{h}{m_e \cdot \lambda_e} = \frac{6'63 \times 10^{-34} (\text{J} \cdot \text{s})}{9'1 \times 10^{-31} (\text{kg}) \cdot 2'32 \times 10^{-9} (\text{m})} = 3'14 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

b. A esta velocidad el electrón es no-relativista, ya que su velocidad es del orden del 0'1 % de la velocidad de la luz.