CAMPO GRAVITATORIO

Ley de la Gravitación Universal.

Existe una fuerza de atracción entre cada par de partículas cuyo módulo es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.
La dirección de la fuerza es, por tanto, la de la línea que une el par de partículas, y en el sentido de atracción entre ellas.

En forma vectorial: $\boxed{\vec{F} = -G\dfrac{Mm}{R^2}\vec{U}_r}$ $G \equiv$ Constante universal. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2kg^{-2}}$

En módulo: $\boxed{F = G\dfrac{Mm}{R^2}}$

Leyes de Kepler.

<u>1ª Ley o Ley de las órbitas</u>. Los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.

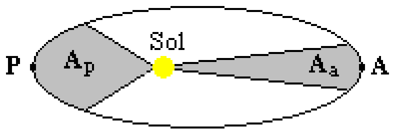
Las fuerzas que rigen el movimiento de los planetas son fuerzas centrales $\left(\vec{r}\,|\,|\,\vec{F}\right)$, por lo tanto el momento angular $\left(\vec{L}\right)$ permanece constante.

$$\left.\begin{matrix}\vec{M}_o = \vec{r}\times\vec{F} \\ \vec{r}\,|\,|\,\vec{F}\end{matrix}\right\}: \left|\vec{M}_o\right| = \left|\vec{r}\times\vec{F}\right| = \left|\vec{r}\right|\cdot\left|\vec{F}\right|\cdot \mathrm{sen}\,180^{\circ} = 0\,;\quad \vec{M}_o = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte\,;\quad \vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = cte$$

Teniendo en cuenta que $r \perp v$

$$\boxed{L = r\,mv = cte}$$

Una consecuencia muy importante de la constancia del momento angular, es que la velocidad de los planetas alrededor del Sol no es constante, siendo mayor en el perihelio que en el afelio



Teniendo en cuenta que $\vec{L} = cte \Rightarrow \vec{L}_p = \vec{L}_a$

$$\vec{r} \perp \vec{p}\ ;\ L = r\,mv\,\mathrm{sen}\,90 = r\,mv\ ;\ r_p \cdot mv_p = r_a \cdot mv_a\ ;$$

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a\ ;\ r_p < r_a$$

P ≡ Perihelio A ≡ Afelio

$$\boxed{v_p > v_a}$$

<u>2ª Ley o Ley de las áreas</u>. Las áreas barridas por el radio vector en tiempos iguales son iguales, es decir, la velocidad areolar (área barrida por unidad de tiempo) es constante

El área de la figura, teniendo en cuenta que $d\theta \to 0$ se puede considerar un sector circular y valdrá:

$$A = \frac{1}{2}r\cdot r d\theta = \frac{1}{2}r^2 d\theta \qquad \text{derivando respecto de t}$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{L}{2m}}$$

Como la fuerza gravitatoria es central:

$$\sum\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte \ \text{ y }\ \frac{dA}{dt} = \text{velocidad areolar} = cte$$

$$\boxed{\vec{v}_{areolar} = \frac{\vec{L}}{2m} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}}$$

3ª Ley o Ley de los periodos. Los cubos de los radio vectores son proporcionales a los cuadrados de los periodos.

Considerando un planeta de masa m en órbita circular alrededor del Sol (M), se cumple:

$$F_g = F_c \qquad G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \qquad v = \frac{2\pi R}{T} \qquad G\frac{M}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}$$

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{cte} \Rightarrow \boxed{\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2}}$$

Ecuaciones del movimiento circular uniforme.

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T}} \qquad \boxed{v = \omega \cdot R = \frac{2\pi R}{T}} \qquad \boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$

Intensidad de campo gravitatorio.

La intensidad de campo gravitatorio $\vec{g}$ en un punto es la fuerza que actúa sobre la unidad de masa situada en ese punto.

$$\boxed{\vec{g} = -G\frac{M}{R^2}\vec{u}_r = \frac{\vec{F}}{m}} \qquad \text{En módulo} \qquad \boxed{g = G\frac{M}{R^2}}$$

En algunos problemas: $\boxed{G \cdot M_T = g_o R_T^2}$

$g_o \equiv$ intensidad de campo gravitatorio en la superficie terrestre

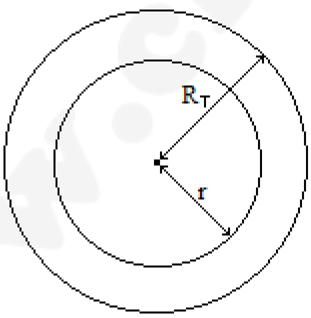
La intensidad de campo gravitatorio depende de la altura, Para el caso de la Tierra:

En la superficie: $g_o = G\dfrac{M_T}{R_T^2}$

A una altura h: $g = G\dfrac{M_T}{(R_T + h)^2}$

Comparando ambas expresiones: $\dfrac{g}{g_o} = \dfrac{G\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}}{G\dfrac{M_T}{R_T^2}} \Rightarrow \boxed{g = g_o \dfrac{R_T^2}{(R_T+h)^2}}$

Haciendo la suposición de que la tierra en homogénea, y por tanto la densidad es constante, se puede encontrar una relación entre la intensidad de campo gravitatorio y la profundidad.



$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$g_o = G\frac{M_T}{R_T^2} = G\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T^3}{R_T^2} = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T$$

$$g = G\frac{M}{r^2} = G\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r$$

Comparando ambas expresiones: $\dfrac{g}{g_o} = \dfrac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r}{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T} \Rightarrow \boxed{g = g_o \dfrac{r}{R_T}}$

Energía potencial gravitatoria.

Representa el trabajo realizado por una fuerza conservativa para desplazar una masa (m) desde el infinito hasta una distancia R del centro de otra masa (M).

$$\boxed{E_p = -G\frac{Mm}{R}}$$

Se expresa en Julios, en el infinito e nula, y por tanto siempre es negativa.

Potencial gravitatorio.

$$\boxed{V = \frac{E_p}{m} = -G\frac{M}{R}}$$

Se expresa en J/kg y siempre es negativo.

Trabajo.

$$\boxed{W = -\Delta E_p} \qquad \boxed{W_{A\to B} = m\cdot(V_A - V_B)} : \begin{cases} > 0 \text{ El trabajo lo realiza el campo y la } E_p \text{ disminuye} \\ > 0 \text{ El trabajo se realiza contra el campo y la } E_p \text{ aumenta} \end{cases}$$

Movimiento de planetas y satélites.

Si un planeta o un satélite describen una órbita circular con movimiento uniforme, se cumple:

$$\boxed{\sum F = F_c} \qquad \boxed{F_G = F_c} \qquad \boxed{G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R}}$$

Velocidad en la órbita: $\boxed{v = \sqrt{G\frac{M}{R}}}$

Radio de la órbita: $\boxed{R = \frac{GM}{v^2}}$

Periodo de la órbita: $\boxed{T = \frac{2\pi R}{v} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R^3}}$

Energía.

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R}}$$

- Si $E_m < 0$, el cuerpo está ligado al campo gravitatorio y permanece en órbita circular o elíptica.

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{G\frac{M}{R}}\right)^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{2R}}$$

- Si $E_m = 0$ el cuerpo no está ligado al campo gravitatorio y escapa de la órbita, llegando al infinito con velocidad nula (tiempo infinito).

- Si $E_m > 0$ el cuerpo no está ligado al campo gravitatorio y escapa de la órbita.

Velocidad de escape terrestre.

Es la velocidad mínima que hay que comunicar a un cuerpo en la superficie de la tierra para que escape del campo gravitatorio.

Teniendo en cuenta que la energía potencial en el infinito es nula y que la velocidad de escape mínima no incluye que el cuerpo llegue con energía cinética, se cumple:

$$\boxed{E_m(\text{Superficie}) = E_m(\text{Infinito}) = 0} \qquad \boxed{\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R_T} = 0} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}}$$

Principio de conservación de la energía.

- El trabajo necesario para poner un satélite en órbita:

$$E_m = W + (E_p)_{\text{Superficie}} = (E_c + E_p)_{\text{órbita}} \quad \Rightarrow \quad W - G\frac{Mm}{R_T} = \frac{1}{2}mv^2_{\text{órbita}} - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{2R}$$

$$\boxed{W = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R}\right)}$$

La velocidad de lanzamiento se calcula teniendo en cuenta que $W = \frac{1}{2}mv_o^2$

$$\boxed{v_o = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R}\right)}}$$

- El trabajo necesario para cambiar de órbita un satélite es:

$$E_m = W + (E_c + E_p)_{\text{órbita 1}} = (E_c + E_p)_{\text{órbita 2}} \qquad W - G\frac{Mm}{2R_1} = -G\frac{Mm}{2R_2}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}GMm\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

- Trabajo necesario para colocar un cuerpo a una altura h

$$E_m = W + (E_p)_{\text{Superficie}} = (E_p)_{R+h}$$

$$\boxed{W = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)}$$

- Trabajo necesario para sacar a un satélite en órbita del campo gravitatorio

$$E_m = W + (E_c + E_p)_{\text{órbita}} = 0$$

$$\boxed{W = G\frac{Mm}{2R}}$$

Órbitas elípticas

Para órbitas elípticas, se usa como radio la distancia media (a)

$$\boxed{a = \frac{r_p + r_a}{2}}$$

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}}$$

$$\boxed{E_m = -G\frac{Mm}{2a}}$$