ONDAS

Modelo 2014. Pregunta 2B.- Una onda transversal se propaga por un medio elástico con una velocidad v, una amplitud A_o y oscila con una frecuencia f_o. Conteste razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Determine en qué proporción cambiarían la longitud de onda, la velocidad de propagación, el periodo y la amplitud, si se actúa sobre el foco emisor de ondas reduciendo a la mitad la frecuencia de oscilación.

b) Sin alterar su frecuencia f_o, se modifica la amplitud de la onda haciendo que aumente al doble. ¿En qué proporción cambiarían la velocidad de la onda, la velocidad máxima de las partículas del medio y la longitud de onda?

Solución.

a. - La velocidad de propagación de la onda solo depende de las propiedades del medio material por el que se propaga la onda, por lo que al variar la frecuencia **no variará la velocidad de propagación**.

- Teniendo en cuenta la relación existente entre la velocidad de propagación (que no varía), la longitud de onda y la frecuencia, si se reduce la frecuencia a la mitad, la longitud de onda se duplicará.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = \dfrac{v}{f} \\ \lambda' = \dfrac{v}{f'}\end{array}\right\} : \text{Si } f' = \frac{f}{2} : \text{Comparando} : \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{v/f'}{v/f} = \frac{f}{f'} = \frac{f}{f/2} = 2 \Rightarrow \lambda' = 2\lambda$$

- Si se reduce la frecuencia a la mitad, el periodo aumenta al doble.

$$\left.\begin{array}{l}T = 1/f \\ T' = 1/f'\end{array}\right\} : \text{Si } f' = \frac{f}{2} : \text{Comparando} : \frac{T'}{T} = \frac{1/f'}{1/f} = \frac{f}{f'} = \frac{f}{f/2} = 2 \Rightarrow T' = 2T$$

- La amplitud no depende de la frecuencia

b. - La velocidad de la onda no depende de la amplitud, depende de las propiedades del medio en el que se propaga.

- La velocidad máxima de vibración aumentara al doble.

$$\left.\begin{array}{l}v_{máx} = A\cdot\omega \\ v'_{máx} = A'\cdot\omega\end{array}\right\} : \text{Comparando} : \frac{v'_{máx}}{v_{máx}} = \frac{A'\cdot\omega}{A\cdot\omega} = \frac{A'}{A} = \frac{2A}{A} = 2 \Rightarrow v'_{máx} = 2v_{máx}$$

- La longitud de onda no depende de la amplitud, como se vio en el apartado a.

Modelo 2014. Pregunta 2A.- Un espectador que se encuentra a 20 m de un coro formado por 15 personas percibe el sonido con un nivel de intensidad sonora de 54 dB.

a) Calcule el nivel de intensidad sonora con que percibiría a un solo miembro del coro cantando a la misma distancia.

b) Si el espectador sólo percibe sonidos por encima de 10 dB, calcule la distancia a la que debe situarse del coro para no percibir a éste.

Suponga que el coro emite ondas esféricas, como un foco puntual y todos los miembros del coro emiten con la misma intensidad.

Dato: Umbral de audición, $I_o = 10^{-12}$ W m^{-2}

Solución.

a. Teniendo en cuenta que cada miembro del coro es un foco puntual y que todos los miembros del coro tienen igual potencia. La intensidad (I_1) que recibiría un espectador a una determinada distancia procedente del coro será:

$$I_1 = \frac{15P}{S}$$

Siendo P la potencia de cada miembro del coro. La intensidad (I_2) que recibiría un espectador a esa misma distancia de un único miembro del coro será:

$$I_2 = \frac{P}{S}$$

Comparando ambas expresiones:

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{P/S}{15P/S}=\frac{1}{15}$$

La intensidad sonora (β) que recibiría el espectador en cada una de las situaciones anteriores seria:

$$\beta_1=10\log\frac{I_1}{I_o} \qquad \beta_2=10\log\frac{I_2}{I_o}$$

Si se despejan la intensidades y se compara:

$$\left.\begin{aligned} I_1=I_o\cdot 10^{\beta_1/10}\\ I_2=I_o\cdot 10^{\beta_2/10}\end{aligned}\right\}:\frac{I_2}{I_1}=\frac{I_o\cdot 10^{\beta_2/10}}{I_o\cdot 10^{\beta_1/10}}=10^{\frac{1}{10}(\beta_2-\beta_1)}$$

Sustituyendo la relación obtenida entre las intensidades:

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{1}{15}=10^{\frac{1}{10}(\beta_2-\beta_1)}$$

Tomando logaritmos decimales, se despeja la intensidad sonora (β_2) que se percibiría cuando cantase un solo miembro del coro.

$$\log\frac{1}{15}=\log 10^{\frac{1}{10}(\beta_2-\beta_1)} \qquad \frac{1}{10}(\beta_2-\beta_1)=\log\frac{1}{15} \qquad \beta_2=\beta_1+10\log\frac{1}{15}$$

$$\beta_2=54+10\log\frac{1}{15}=42{,}24\ \text{dB}$$

b. En este apartado, se mantiene constante la potencia de emisión y se varia la distancia al coro, y por lo tanto la superficie. Si se aplica la definición de intensidad cuando el espectador se encuentra a 20 m (d_1) y a la posición donde la intensidad sonora que percibe es de 10 dB o menor (d_2) y se comparan:

$$\left.\begin{aligned} I_1=\frac{P}{S_1}=\frac{P}{\pi\cdot d_1^2}\\ I_2=\frac{P}{S_2}=\frac{P}{\pi\cdot d_2^2}\end{aligned}\right\}:\frac{I_2}{I_1}=\frac{\cancel{P}/\pi\cdot d_2^2}{\cancel{P}/\pi\cdot d_1^2}=\frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Por otro lado la relación entre la intensidades y las intensidades sonoras es la misma que la obtenida en el apartado anterior:

$$\frac{I_2}{I_1}=10^{\frac{1}{10}(\beta_2-\beta_1)}$$

Sustituyendo las intensidades por la relación entre las distancias, se despeja la distancia a la que se empezaría a no oír al coro.

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{d_1^2}{d_2^2}=10^{\frac{1}{10}(\beta_2-\beta_1)} \qquad d_2=d_1\cdot\sqrt{\frac{1}{10^{\frac{1}{10}(\beta_2-\beta_1)}}} \qquad d_2=20\cdot\sqrt{\frac{1}{10^{\frac{1}{10}(10-54)}}}$$

$$d_2\geq 3169{,}79\ \text{m}$$

Septiembre 2013. Pregunta 2A.- Un altavoz emite sonido como un foco puntual. A una distancia d, el sonido se percibe con un nivel de intensidad sonora de 30 dB. Determine:

- **a)** El factor en el que debe incrementarse la distancia al altavoz para que el sonido se perciba con un nivel de intensidad sonora de 20 dB.
- **b)** El factor en el que debe incrementarse la potencia del altavoz para que a la distancia d el sonido se perciba con un nivel de intensidad sonora de 70 dB.

Dato: Umbral de audición, $I_o=10^{-12}$ W m^{-2}

Solución.

a. La intensidad de un sonido, depende de la potencia de la fuente emisora y de la distancia a ella.

$$I = \frac{P}{4\pi\, r^2}$$

Para una misma fuente a dos distancias diferentes:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = \dfrac{P}{4\pi\, r_1^2} \\ I_2 = \dfrac{P}{4\pi\, r_2^2} \end{array}\right\} : \text{Comparando} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

La intensidad de un sonido, también se puede relacionar con el nivel de intensidad sonora con que se percibe (β).

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_o} \qquad I = I_o \cdot 10^{\beta/10}$$

Aplicando a dos intensidades diferentes, producidas por la misma fuente:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = I_o \cdot 10^{\beta_1/10} \\ I_2 = I_o \cdot 10^{\beta_2/10} \end{array}\right\} : \text{Comparando} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{\beta_1/10}}{10^{\beta_2/10}} = 10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}}$$

Las relaciones obtenidas permiten obtener otra relación entre las intensidades y el nivel de intensidad sonora.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{r_2^2}{r_1^2} \\ \\ \dfrac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} \end{array}\right\} : \frac{r_2^2}{r_1^2} = 10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} \Rightarrow r_2 = r_1 \cdot \sqrt{10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}}}$$

Sustituyendo por los datos:

$$r_2 = d \cdot \sqrt{10^{\frac{30-20}{10}}} \Rightarrow r_2 = \sqrt{10} \cdot d$$

b. En este apartado nos piden la potencia de la fuente para que a la misma distancia, aumente el nivel de intensidad sonora. Trabajando de forma análoga al apartado a):

$$I = \frac{P}{4\pi\, r^2} : \left\{\begin{array}{l} I_1 = \dfrac{P_1}{4\pi\, d_1^2} \\ I_1 = \dfrac{P_1}{4\pi\, d_1^2} \end{array}\right\} : \text{Comparando} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{P_1}{P_2}$$

Teniendo en cuenta la relación obtenida en el apartado anterior entre la intensidad y el nivel de intensidad sonora:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{P_1}{P_2} \\ \\ \dfrac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} \end{array}\right\} : \frac{P_1}{P_2} = 10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} \Rightarrow P_2 = P_1 \cdot 10^{\frac{\beta_2 - \beta_1}{10}}$$

$$P_2 = P_1 \cdot 10^{\frac{70-30}{10}} = P_1 \cdot 10^4 = 10000 P_1$$

Junio 2013. Pregunta 1A.- Una onda transversal, que se propaga en el sentido positivo del eje X, tiene una velocidad de propagación de 600 m s^{-1} y una frecuencia de 500 Hz. Determine:

a) La mínima separación entre dos puntos del eje X que tengan un desfase de 60º, en el mismo instante

b) El desfase entre dos elongaciones, en la misma coordenada x, separadas por un intervalo de tiempo de dos milésimas de segundo.

Solución.

Parámetros de la onda:

$$v = 600\ m\ s^{-1} \qquad f = 500\ Hz \qquad \omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 500\ rad\ s^{-1} = 1000\pi\ rad\ s^{-1} \qquad k = \frac{\omega}{v} = \frac{1000\pi}{600} = \frac{5}{3}\pi\ m^{-1}$$

a. El desfase entre dos puntos en un mismo instante viene dado por:

$$\Delta\varphi = (\omega t - kx_1 + \varphi_o) - (\omega t - kx_2 + \varphi_o) = k(x_2 - x_1) = k\cdot\Delta x$$

$$\Delta\varphi = k\cdot\Delta x \qquad \Delta x = \frac{\Delta\varphi}{k} = \frac{\pi/3}{5\pi/3} = 0{,}2\ m$$

b. El desfase entre dos elongaciones, en la misma coordenada x, separadas por un intervalo de tiempo viene expresado por:

$$\Delta\varphi = (\omega t_2 - kx + \varphi_o) - (\omega t_2 - kx + \varphi_o) = \omega(t_2 - t_1) = \omega\cdot\Delta t$$

$$\Delta\varphi = \omega\cdot\Delta t = 1000\pi\ rad/s \cdot 2\times 10^{-3}\ s = 2\pi\ rad$$

Modelo 2013. Pregunta 2B.- La función matemática que representa una onda transversal que avanza por una cuerda es $y(x,t) = 0{,}3\,\text{sen}(100\pi\,t - 0{,}4\pi\,x + \varphi_o)$, donde todas las magnitudes están expresadas en unidades del SI.

Calcule:

a) La separación entre dos puntos cuya diferencia de fase, en un determinado instante, es de π/5 radianes.

b) La diferencia de fase entre dos vibraciones de un mismo punto del espacio separadas por un intervalo de tiempo de 5 ms.

Solución.

a. Para un mismo instante de tiempo, la diferencia de fase entre dos puntos es:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (100\pi\,t_o - 0{,}4\pi\,x_2 + \varphi_o) - (100\pi\,t_o - 0{,}4\pi\,x_1 + \varphi_o) = 0{,}4\pi\cdot(x_1 - x_2) = 0{,}4\pi\cdot\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{\Delta\varphi}{0{,}4\pi} = \frac{\pi/5}{0{,}4\pi} = 0{,}5\ m$$

b. Para un intervalo de tiempo, la diferencia de fase de un mismo punto viene dado por:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (100\pi\,t_2 - 0{,}4\pi\,x_0 + \varphi_o) - (100\pi\,t_1 - 0{,}4\pi\,x_0 + \varphi_o) = 100\pi\cdot(t_2 - t_1) = 100\pi\cdot\Delta t$$

$$\Delta\varphi = 100\pi\cdot\Delta t = 100\pi\cdot 5\cdot 10^{-3} = \frac{\pi}{2}\ rad$$

Septiembre 2012. Pregunta 1.- Una onda armónica transversal de frecuencia angular 4π rad s^{-1} se propaga a lo largo de una cuerda con una velocidad de 40 cm s^{-1}, en la dirección positiva del eje X. En el instante inicial t = 0, en el extremo de la cuerda x = 0, su elongación es de + 2,3 cm y su velocidad de oscilación es de 27 cm s^{-1}.

Determine:

a) La expresión matemática que representa la onda.

b) El primer instante en el que la elongación es máxima en x = 0.

Solución.

a. La expresión matemática de una onda transversal que se propaga en la dirección positiva del eje X es:

$$y(x,t) = A\ \text{sen}\,(\omega\,t - k\,x + \varphi_o)$$

El número de onda (k) se obtiene a partir de la velocidad propagación (v = 0,4 m s^{-1}) y de la frecuencia angular (ω = 4π rad s^{-1}).

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{4\pi}{0{,}4} = 31{,}42\ rad\ m^{-1}$$

La amplitud y el desfase inicial se calculan planteando un sistema con la posición y velocidad de oscilación en el instante inicial y en el origen de espacio (y(0,0) = 0,023 m; v(0,0) = 0,27 m s^{-1}).

$$y(0,0) = A\ \text{sen}\left(\omega \cdot 0 - k \cdot 0 + \varphi_o\right) = A\ \text{sen}\ \varphi_o = 0{,}023$$

$$v(x,t) = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t - kx + \varphi_o) \Rightarrow v(x,t) = A\omega \cos(\omega \cdot 0 - k \cdot 0 + \varphi_o) = A\omega \cos \varphi_o = 0{,}27$$

$$\begin{cases} A\ \text{sen}\ \varphi_o = 0{,}023 \\ A\omega \cos \varphi_o = 0{,}27 \end{cases} \text{Dividiendo: } \frac{0{,}023}{0{,}27} = \frac{A\text{sen}\ \varphi_o}{A\omega \cos \varphi_o} = \frac{1}{\omega} \text{tg}\ \varphi_o$$

$$\varphi_o = \text{arctg}\left(0{,}085 \cdot 4\pi\right) = 0{,}82\ \text{rad}$$

$$A = \frac{0{,}023}{\text{sen}\ \varphi_o} = \frac{0{,}023}{\text{sen}\ 0{,}82} = 0{,}031\ \text{m}$$

Conocidos todos los parámetros de la onda se sustituyen en la ecuación.

$$y(x,t) = 0{,}031\ \text{sen}\left(4\pi\ t - 31{,}42\ x + 0{,}82\right)$$

b. Se pide calcular el tiempo que ha de pasar para que se cumpla y(0, t) = A

$$y(0,t) = 0{,}031\ \text{sen}\left(4\pi\ t - 31{,}42 \cdot 0 + 0{,}82\right) = 0{,}031\ \text{sen}\left(4\pi\ t + 0{,}82\right) = 0{,}031$$

$$\text{sen}\left(4\pi\ t + 0{,}82\right) = 1 \ \Rightarrow\ 4\pi\ t + 0{,}82 = \text{arcsen}\ 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$t = 0{,}06\ \text{s}$$

Junio 2012. Pregunta 2A.- En una cuerda se genera una onda armónica transversal de 20 cm de amplitud, velocidad de propagación 5 m s^{-1} y frecuencia 30 Hz. La onda se desplaza en el sentido positivo del eje *X*, siendo en el instante inicial la elongación nula en la posición x = 0

a) Escriba la expresión matemática que describe dicha onda si en t = 0 y x = 0 la velocidad de oscilación es positiva.

b) Calcule la velocidad y aceleración máximas de un punto de la cuerda.

Solución.

a. Ecuación de una onda armónica transversal que se propaga en el sentido positivo del eje X es:

$$y(x,t) = A\ \text{sen}\left(\omega\ t - k\ x + \varphi_o\right)$$

Datos: $A = 20\ \text{cm} = 0{,}2\ \text{m} \quad v = 5\ \text{m}\ \text{s}^{-1} \quad f = 30\ \text{Hz}$

La frecuencia permite calcular la velocidad angular

$$\omega = 2\pi\ f = 2\pi \cdot 30 = 60\pi\ \text{rad}/\text{s}$$

El número de onda se puede calcular a partir fe la longitud de onda (λ), y esta conocidas la velocidad y la frecuencia.

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda = v \cdot T = \dfrac{v}{f} \end{array}\right\} : k = \frac{2\pi}{v/f} = \frac{2\pi\ f}{v} = \frac{2\pi \cdot 30}{5} = 12\pi\ \text{m}^{-1}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$y(x,t) = 0{,}2\ \text{sen}\left(60\pi\ t - 12\pi\ x + \varphi_o\right)$$

Para calcular la fase inicial se tiene en cuenta que y(0, 0) = 0 y que v(0, 0) = 0.

$$y(0,0) = 0{,}2\ \text{sen}\left(60\pi \cdot 0 - 12\pi \cdot 0 + \varphi_o\right) = \text{sen}\ \varphi_o = 0 : \begin{cases} \varphi_o = 0\ \text{rad} \\ \varphi_o = \pi\ \text{rad} \end{cases}$$

Para discernir cual de las dos corresponde a los datos, se tiene en cuenta el valor de la velocidad inicial.

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = A\omega \cos\left(\omega\ t - k\ x + \varphi_o\right) \quad v(0,0) = A\omega \cos\left(\omega \cdot 0 - k \cdot + \varphi_o\right) = A\omega \cos \varphi_o$$

$$\text{Si} \quad \varphi_o = 0 \qquad v(0,0) = A\omega \cos 0 = A\omega \cdot 1 = A\omega > 0$$

$$\text{Si} \quad \varphi_o = \pi \quad v(0,0) = A\omega \cos \pi = A\omega \cdot (-1) = -A\omega < 0$$

El desfase inicial es nulo y la ecuación de la onda es:

$$y(x,t) = 0{,}2\,\mathrm{sen}\,(60\pi\,t - 12\pi\,x)$$

b. $v(x,t) = 0{,}2\cdot 60\pi\cos(60\pi\,t - 12\pi\,x) = 12\pi\cos(60\pi\,t - 12\pi\,x)$

$$v = v_{max} \Leftrightarrow \cos(60\pi\,t - 12\pi\,x) = 1 \quad v_{max} = 12\pi\ {}^{m}/_{s}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad respecto al tiempo.

$$a = (x,t) = \frac{dv(x,t)}{dt} = -A\omega^2\mathrm{sen}\,(\omega\,t - k\,x) = -0{,}2\cdot(60\pi)^2\mathrm{sen}\,(60\pi\,t - 12\pi\,x) = 720\pi^2\mathrm{sen}\,(60\pi\,t - 12\pi\,x)$$

$$a = a_{max} \Leftrightarrow \mathrm{sen}\,(60\pi\,t - 12\pi\,x) = 1 \quad a_{max} = 720\pi^2\ {}^{m}/_{s^2}$$

Junio 2012. Pregunta 2.B- La potencia sonora del ladrido de un perro es aproximadamente 1 mW y dicha potencia se distribuye uniformemente en todas las direcciones. Calcule:

- **a)** La intensidad y el nivel dé intensidad sonora a una distancia de 10 m del lugar donde se produce el ladrido.
- **b)** El nivel de intensidad sonora generada por el ladrido de 5 perros a 20 m de distancia de los mismos.

Suponga que todos los perros emiten sus ladridos en el mismo punto del espacio. .

Dato: Intensidad umbral. $I_o = 10^{-12}$ W m^{-2}

Solución.

a. $I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10^{-3}\,w}{4\pi\cdot 10^2} = 7{,}96\times 10^{-7}\ \frac{w}{m^2}$

Nivel de intensidad sonora (β): $\beta = 10\log\frac{I}{I_o} = 10\log\frac{7{,}96\times 10^{-7}}{10^{-12}} = 59\ \mathrm{dB}$

b. La potencia de los cinco ladridos es:

$$P = 5\cdot 10^3 \quad I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{5\cdot 10^{-3}\,w}{4\pi\cdot 20^2} = 9{,}95\times 10^{-7}\ \frac{w}{m^2}$$

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_o} = 10\log\frac{5{,}95\times 10^{-7}}{10^{-12}} = 60\ \mathrm{dB}$$

Modelo 2012. Pregunta 2B.- Una onda sinusoidal con una amplitud de 1,5 m y una frecuencia de 100 Hz viaja a una velocidad de propagación v = 200 m/s en la dirección positiva del eje *X* y oscila en la dirección del eje *Y*. En el instante *t* = 0 la elongación es máxima y positiva en el punto *x* = +3 m.

- **a)** Calcule la longitud de onda, λ, y el número de onda, *k*, de la onda.
- **b)** Determine la expresión matemática que representa la onda.

Solución.

$$A = 1{,}5\ \mathrm{m};\ f = 100\ \mathrm{Hz};\ v = 200\ {}^{m}/_{s}$$

a. $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{200\ m/s^{-1}}{100\ s^{-1}} = 2\ \mathrm{m}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ {}^{rad}/_{m}$$

b. La expresión matemática de una onda armónica que se desplaza en el sentido positivo de x es:

$$y = A\ \mathrm{sen}\,(\omega\,t - k\,x + \varphi_o)$$

$$\omega = 2\pi\,f = 2\pi\cdot 100 = 200\pi\ {}^{rad}/_{s}$$

$$y = 1{,}5\,\text{sen}\left(200\pi\,t - \pi\,x + \varphi_o\right)$$

Para calcular la fase inicial se tiene en cuenta que para t = 0; y = A = 1,5 m en x = 3 m.

$$1{,}5 = 1{,}5\,\text{sen}\left(200\pi \cdot 0 - \pi \cdot 3 + \varphi_o\right)\ ;\ \ \text{sen}\left(\varphi_o - 3\pi\right) = 1\ ;\ \ \varphi_o - 3\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_o = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2}$$

La expresión matemática de una onda armónica queda:

$$y = 1{,}5\,\text{sen}\left(200\pi\,t - \pi\,x + \frac{7\pi}{2}\right)$$

Septiembre 2011. Problema 1A.- Una onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X tiene una amplitud de 2 cm, una longitud de onda de 4 cm y una frecuencia de 8 Hz. Determine:

a) La velocidad de propagación de la onda.
b) La fase inicial sabiendo que para x = 0 y t = 0 la elongación es y = + 1 cm y la velocidad positiva.
c) La expresión matemática de la onda, como una función de x y t.
d) La distancia mínima de separación entre dos puntos que tienen un desfase de π / 3 radianes.

Solución.

a. $$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 0{,}04\,\text{m} \cdot 8\,\text{s}^{-1} = 0{,}32\,\text{m/s}$$

b. $$y(x,t) = A \cdot \text{sen}\left(\omega t - kx + \varphi_o\right);\ \ y(0,0) = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot 0 - k \cdot 0 + \varphi_o\right) = A \cdot \text{sen}\,\varphi_o$$

$$v(x,t) = \frac{dy}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_o);\ \ v(0,0) = A\omega \cdot \cos(\omega \cdot 0 - k \cdot 0 + \varphi_o) = A\omega \cdot \cos\varphi_o$$

Aplicando los datos del enunciado:

$$y(0,0) = 0.01 = 0{,}02 \cdot \text{sen}\,\varphi_o :\ \varphi_o = \text{arcsen}\frac{1}{2} : \begin{cases} \varphi_o = \dfrac{\pi}{6}\,\text{rad} \\ \varphi_o = \dfrac{5\pi}{6}\,\text{rad} \end{cases}$$

Para discernir cual de los dos desfase es el que corresponde a la onda propuesta, se tiene en cuenta que la velocidad inicial es positiva.

- Para $\varphi_o = \frac{\pi}{6}\,\text{rad};\ v(0,0) = A\omega \cdot \cos\frac{\pi}{6} > 0$
- Para $\varphi_o = \frac{5\pi}{6}\,\text{rad};\ v(0,0) = A\omega \cdot \cos\frac{5\pi}{6} < 0$

Teniendo en cuenta que la velocidad inicial es positiva, el desfase inicial es:

$$\varphi_o = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$$

c. $$y(x,t) = A \cdot \text{sen}\left(\omega t - kx + \varphi_o\right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi\,\text{rad} \cdot 8\,\text{s}^{-1} = 16\pi\,\text{rad/s}\ ;\ \ k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}04} = 50\pi\,\text{m}^{-1}$$

$$y(x,t) = 0{,}022 \cdot \text{sen}\left(16\pi t - 50\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$$

d. $$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \left(16\pi t - 50\pi x_2 + \frac{\pi}{6}\right) - \left(16\pi t - 50\pi x_1 + \frac{\pi}{6}\right) = 50\pi(x_1 - x_2) = 50\pi \cdot \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{\Delta\varphi}{50\pi} = \frac{\pi/3}{50\pi} = \frac{1}{150} = 6{,}67 \times 10^{-3}\,\text{m}$$

Junio 2011. Cuestión 2A.- Una onda transversal de amplitud A = 5 cm que se propaga por un medio material tarda 2 s en recorrer una distancia de 50 cm, y sus puntos más próximos de igual fase distan entre si 25 cm. Determine:

a) la expresión matemática de la función de onda si en el instante t = 0, la elongación es el origen, x = 0, es nula.

b) La aceleración de un punto de la onda situado en x = 25 cm, en el instante t = 1 s.

Solución.

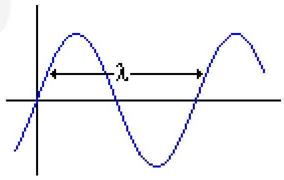
a. Tomando como positivo el sentido de desplazamiento de la onda:

$$y = f(x,t) = A\ \text{sen}\ (\omega t - k x + \varphi_o)$$

- Amplitud: $A = 5\times10^{-2}$ m
- φ_o (desfase inicial): Para t = 0, x = 0 $\Rightarrow$ y = 0

$$y = f(0,0) = A\ \text{sen}\ (\omega\cdot 0 - k\cdot 0 + \varphi_o) = 0\ ;\quad \text{sen}\ \varphi_o = 0 : \begin{cases} \varphi_o = 0\ \text{rad} \\ \varphi_o = \pi\ \text{rad} \end{cases}$$

- Número de ondas (k): número de longitudes de onda que hay en una distancia 2π. Entre dos puntos en igual fase, es decir, con igual elongación, velocidad y aceleración, la distancia mínima entre ellos es la longitud de onda (λ).



$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{25\times10^{-2}} = 8\pi\ \text{rad}/\text{m}$$

- Velocidad angular (ω): se puede obtener de su relación con el numero de ondas.

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda = v\cdot T \end{array}\right\} : k = \frac{2\pi}{v\cdot T} \xrightarrow{T=\frac{2\pi}{\omega}} k = \frac{2\pi}{v\cdot\frac{2\pi}{\omega}} :\ k = \frac{\omega}{v} :\ \omega = v\cdot k$$

$$\omega = \frac{50\times10^{-2}\ \text{m}}{2\ \text{s}}\cdot 8\pi\frac{\text{rad}}{\text{m}} = 2\pi\ \text{rad}/\text{s}$$

Sustituyendo los datos en la expresión, se obtiene la ecuación de la onda.

$$y = f(x,t) = 5\times10^{-2}\ \text{sen}\ (2\pi t - 8\pi x)\quad \text{o}\quad y = f(x,t) = 5\times10^{-2}\ \text{sen}\ (2\pi t - 8\pi x + \pi)$$

b. Por definición, la aceleración es la derivada segunda de la posición respecto al tiempo.

$$y(x,t) = A\ \text{sen}\ (\omega t - k x + \varphi_o)$$

$$y'(x,t) = A\omega\cos\ (\omega t - k x + \varphi_o)$$

$$y''(x,t) = A\omega^2\ \text{sen}\ (\omega t - k x + \varphi_o) = \omega^2 \underbrace{A\ \text{sen}\ (\omega t - k x + \varphi_o)}_{y} = \omega^2 y$$

$$a(1\,\text{s}, 0'25\,\text{m}) = y''(1, 0'25) = \omega^2 y(1, 0'25)$$

$$y(1, 0'25) = 5\times10^{-2}\ \text{sen}\ (2\pi\cdot1 - 8\pi\cdot 0'25) = 5\times10^{-2}\ \text{sen}\ 0 = 0$$

$$a(1\,\text{s}, 0'25\,\text{m}) = \omega^2\cdot y(1, 0'25) = \omega^2\cdot 0 = 0$$

Utilizando la otra expresión se obtiene idéntico resultado.

Junio 2011. Cuestión 2B.- Un altavoz emite con una potencia de 80 W. Suponiendo que el altavoz es una fuente puntual y sabiendo que las ondas sonoras son esféricas, determine:

a) La intensidad de una onda sonora a 10 m del altavoz.

b) ¿A qué distancia de la fuente el nivel de intensidad sonora es de 60 dB?

Dato: Intensidad umbral $I_o = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Solución.

a. La intensidad de una onda sonora viene determinada por la potencia y la posición.

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{80}{4\pi\cdot 10^2} = 0{,}064\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

b. El nivel de intensidad sonora es:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_o}\ ;\ 60 = 10\log\frac{I}{10^{-12}}\ ;\ I = 10^{-6}\,\frac{W}{m^2}$$

Conocida la intensidad y la potencia se calcula la posición (R).

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2}\ ;\ R = \sqrt{\frac{P}{4\pi\, I}} = \sqrt{\frac{80}{4\pi\, 10^{-6}}} = 2523\,m$$

Modelo 2011. Problema 1B. Un punto material oscila en torno al origen de coordenadas en la dirección del eje Y según la expresión:

$$y = 5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)\ \text{(y en cm, t en s).}$$

originando una onda armónica transversal que se propaga en el sentido positivo del eje X.
Sabiendo que dos puntos materiales de dicho eje que oscilan con un desfase de π radianes están separados una distancia mínima de 30 cm, determine:

a) La amplitud y la frecuencia de la onda armónica.
b) La longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.
c) La expresión matemática de la onda resultante.
d) La expresión de la velocidad de oscilación en función del tiempo para el punto material del eje X de coordenada x = 90 cm, y el valor de dicha velocidad en el instante t = 20 s.

Solución.

a. La amplitud y frecuencia de la onda coincide con la amplitud y frecuencia del movimiento oscilatorio.

$$A = 5\times 10^{-2}\ m \qquad \omega = \frac{\pi}{3}\,rad = 2\pi f \qquad f = \frac{1}{6}\,s^{-1}$$

b. El incremento de fase en un instante dado es:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t - kx_1 + \varphi_o) - (\omega t - kx_2 + \varphi_o) = k(x_1 - x_2) = k\cdot\Delta x$$

Teniendo en cuenta $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta x\ ;\quad \lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}\cdot\Delta x = \frac{2\pi}{\pi}\cdot 0{,}3 = 0{,}6\,m$$

Conocida la longitud de onda, se calcula la velocidad de propagación.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = 0{,}6\,m\cdot\frac{1}{6}s^{-1} = 0{,}1\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

c. $y(x,t) = A\cdot\text{sen}\,(\omega t - kx + \varphi_o)$

El número de onda (k) se calcula con la longitud de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}6} = \frac{10}{3}\pi\,m^{-1}$$

El desfase inicial coincide con el desfase inicial del movimiento ondulatorio

$$y(0) = 5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\cdot 0 + \frac{\pi}{4}\right) = 5\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4};\ \ \varphi_o = \frac{\pi}{4}\,rad$$

Sustituyendo los datos se obtiene la ecuación de la onda

$$y(x,t) = 0{,}05\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{10}{3}\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

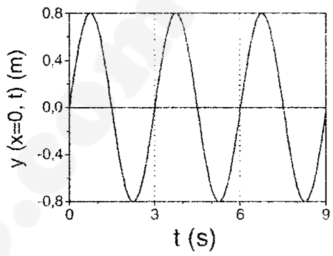
d. $$y(0'9,t)=0{,}05\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{10}{3}\pi\cdot 0'9+\frac{\pi}{4}\right)=0{,}05\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{11}{4}\pi\right)$$

$$v(0'9,t)=\frac{dy}{dt}=0{,}05\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{11}{4}\pi\right)=\frac{\pi}{60}\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{11}{4}\pi\right)$$

Para t = 20 s

$$v(0'9,20)=\frac{\pi}{60}\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 20-\frac{11}{4}\pi\right)=\frac{\pi}{60}\cos\left(\frac{47}{12}\pi\right)=0{,}05\,{}^{m}\!/\!_{s}$$

Septiembre 2010 F.M. Cuestión 2B.- Una onda armónica transversal de longitud de onda λ =1 m se desplaza en el sentido positivo del eje X. En la gráfica se muestra la elongación (y) del punto de coordenada x = 0 en función del tiempo. Determine:

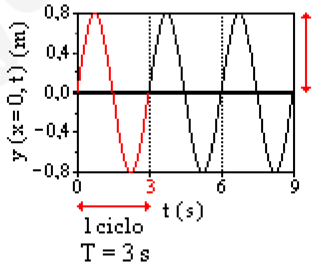


- **a)** La velocidad de propagación de la onda.
- **b)** La expresión matemática que describe esta onda.

Solución.

a. De la gráfica anexa se pueden obtener el periodo y la amplitud. El periodo es el tiempo que tarda en completar un ciclo (línea roja). La amplitud es la máxima elongación, o máxima separación del origen

A = 0,8 m; T = 3 s



La velocidad de propagación de una onda es: $v=\frac{\lambda}{t}=\frac{1}{3}$

b. La ecuación de una onda armónica transversal que se desplaza en el sentido positivo de X es:

$$y(x,t)=A\ \text{sen}\,(\omega t-k\,x+\varphi)$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{3}\,{}^{rad}\!/\!_{s}\ ;\ k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi/3}{1/3}=2\pi\,m^{-1}\ \text{ o también }\ k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{1}=2\pi\,m^{-1}$$

El desfase inicial (φ) se calcula sabiendo que para x = 0 y t = 0, y = 0.

$$y(0,0)=0=0{,}8\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 0-2\pi\cdot 0+\varphi\right)\Leftrightarrow \text{sen}\,\varphi=0:\ \ \varphi=0$$

Sustituyendo los datos en la expresión se obtiene la ecuación de la onda.

$$y(x,t)=0=0{,}8\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}t-2\pi\,x\right)$$

Junio 2010 F.M. Problema 1A.- Una onda armónica transversal, de periodo T = 2 s, se propaga con una velocidad de 60 cm/s en una cuerda tensa orientada según el eje X, y en sentido positivo. Sabiendo que el punto de la cuerda de abscisa x = 30 cm oscila en la dirección del eje Y, de forma que en el instante t = 1 s la elongación es nula y la velocidad con la que oscila positiva y en el instante t = 1,5 s su elongación es –5 cm y su velocidad de oscilación nula, determine:

- **a)** La frecuencia y la longitud de onda.
- **b)** La fase inicial y la amplitud de la onda armónica.
- **c)** La expresión matemática de la onda armónica.
- **d)** La diferencia de fase de oscilación de dos puntos de la cuerda separados un cuarto de longitud de onda.

Solución.

a. La frecuencia (ν) es inversa al periodo y a la velocidad de la onda.

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{2}=0{,}5\text{Hz}$$

$$v = \lambda \cdot \nu \;;\; \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{60\times 10^{-2}\ m\,s^{-1}}{0{,}5\,s^{-1}} = 1{,}2\ m$$

b. La ecuación de una onda transversal es:

$$y(x,t) = A\ sen\,(\omega\,t - k\,x + \varphi_o)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ {}^{rad}\!/_{s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1{,}2} = \frac{5\pi}{3}$$

$$y(x,t) = A\ sen\left(\pi\,t - \frac{5\pi}{3}\,x + \varphi_o\right)$$

$$x = 0{,}3\,m;\ t = 1\,s : \begin{cases} y = 0 \\ v > 0 \end{cases} : 0 = A\ sen\left(\pi 1 - \frac{5\pi}{3}0{,}3 + \varphi_o\right);\ A\ sen\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \varphi_o\right) = 0;\ A\ sen\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_o\right) = 0$$

$$sen\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_o\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \varphi_o = 0 :\ \varphi_o = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + \varphi_o = \pi :\ \varphi_o = +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$y(x,t) = A\ sen\left(\pi\,t - \frac{5\pi}{3}\,x - \frac{\pi}{2}\right)\ \text{ó}\ \ y(x,t) = A\ sen\left(\pi\,t - \frac{5\pi}{3}\,x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Para diferenciar entre los desfases se tiene en cuenta el dato de que la velocidad es positiva.

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = A\ \omega\cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{3}\,x \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v(0'3,1) = A\omega\cos\left(\pi\cdot 1 - \frac{5\pi}{3}\cdot 0{,}3 \pm \frac{\pi}{2}\right) = A\omega\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

Si el desfase es positivo: $v(0'3,1) = A\omega\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = A\omega\cos\pi < 0$

Si el desfase es negativo: $v(0'3,1) = A\omega\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = A\omega\cos 0 > 0$

Conclusión el desfase es $\varphi_o = -\frac{\pi}{2}\,rad$

$$x = 0{,}3\,m;\ t = 1{,}5\,s : \begin{cases} y = -0{,}05 \\ v = 0 \end{cases} : -0{,}05 = A\ sen\left(\pi\frac{3}{2} - \frac{5\pi}{3}0{,}3 - \frac{\pi}{2}\right);\ A\ sen\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}05$$

$$A\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}05\ :\ A = -0{,}05\,m$$

La amplitud de una onda no puede ser negativa, diferente es la elongación que puede oscilar entre –A y +A, por lo tanto la única explicación es que el problema está mal planteado.

c. La ecuación de una onda transversal es:

$$y(x,t) = A\ sen\,(\omega\,t - k\,x + \varphi_o)$$

Según los datos obtenidos en los apartados anteriores la ecuación de la onda es:

$$y(x,t) = -0{,}05\,sen\left(\pi\,t - \frac{5\pi}{3}\,x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Por lo explicado en el apartado anterior, **la expresión no tiene sentido**, podríamos haber optado por considerar la amplitud en valor absoluto y ponerla en positivo, pero en este caso, la ecuación no cumpliría las condiciones propuestas.

d. La diferencia de fase entre dos puntos (1 y 2) de la cuerda:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega t - k x_2 + \varphi_o - (\omega t - k x_1 + \varphi_o) = k(x_2 - x_1) = k\,\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{4} = \frac{1{,}2}{4} = 0{,}3 \Rightarrow \Delta\varphi = k\,\Delta x = \frac{5\pi}{3}\cdot 0{,}3 = \frac{\pi}{2}$$

Junio 2010 F.G. Cuestión 2A.-

a) Escriba la expresión matemática de una onda armónica transversal unidimensional, y = y (x, t), que se propaga en el sentido positivo del eje X.

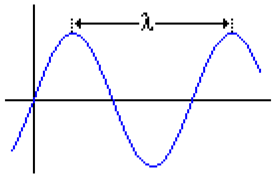
b) Defina los conceptos de las siguientes magnitudes: amplitud, periodo, longitud de onda y fase inicial.

Solución.

a. $y(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega t - k x + \varphi)$

b. **Amplitud (A):** Es la máxima elongación con que vibran las partículas del medio. También se puede definir como la distancia máxima que hay entre un punto de la onda y su posición de equilibrio. En el sistema internacional se expresa en metros.

Periodo (T): Es el tiempo que tarda el movimiento en repetirse. También puede definirse como el tiempo transcurrido entre dos puntos equivalentes de la oscilación o ciclo. En el S. I. se expresa en segundos.



Longitud de onda (λ): La longitud de una onda es la distancia que recorre la onda en el intervalo de tiempo transcurrido entre dos máximos consecutivos. En el S. I. Se expresa en metros.

Fase inicial (φ): Indica el estado de vibración (ó fase) en el instante t = 0 de la partícula que oscila. En el S. I. se expresa en radianes.

Junio 2010 F.G. Cuestión 1B.- El sonido producido por la sirena de un barco alcanza un nivel de intensidad sonora de 80 dB a 10m de distancia. Considerando la sirena como un foco sonoro puntual determine:

a) La intensidad de la onda sonora a esa distancia y a potencia de la sirena.

b) El nivel de intensidad sonora a 500 m de distancia.

Dato: Intensidad umbral de audición $I_o = 10^{-12}\ \text{W m}^{-2}$

Solución.

$\beta \equiv$ Nivel de intensidad sonora.

a. La intensidad, I, de la onda y el nivel de intensidad sonora, nivel acústico,β, están relacionados por la expresión:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_o}$$

Aplicando los datos del enunciado se puede calcular la intensidad de la onda sonora a esa distancia.

$$80 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \ :\ 8 = \log I + 12 \ :\ \log I = -4 \ :\ I = 10^{-4}\ \frac{W}{M^2}$$

La intensidad de una onda en un punto es la cantidad de energía por unidad de tiempo que atraviesa la unidad de superficie colocada en ese punto.

$$I = \frac{E}{t\cdot S} \ :\ \frac{E}{t} = P(\text{Potencia}) \ :\ I = \frac{P}{S} \ :\ I = \frac{P}{4\pi r^2} \ :\ P = 4\pi r^2 I = 4\pi\cdot 10^2\cdot 10^{-4} = 0{,}126\ W$$

b. Teniendo en cuenta que la potencia de la fuente es constante, se calcula la intensidad a 500m, conocida la intensidad, se calcula el nivel de intensidad sonora.

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{0{,}126}{4\pi\cdot 500^2} = 4\times 10^{-8}\ \frac{W}{m^2}$$

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_o} = 10 \log \frac{4\times 10^{-8}}{10^{-12}} = 46\ dB$$

Modelo 2010. Problema 1B.- Un punto material oscila en torno al origen de coordenadas en la dirección del eje Y, según la expresión:

$$y = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (y \text{ en cm; } t \text{ en s}),$$

originando una onda armónica transversal que se propaga en el sentido positivo del eje X.

Sabiendo que dos puntos materiales de dicho eje que oscilan con un desfase de π radianes están separados una distancia mínima de 20 cm., determine:

- **a)** La amplitud y la frecuencia de la onda armónica.
- **b)** La longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.
- **c)** La expresión matemática que representa la onda armónica.
- **d)** La expresión de la velocidad de oscilación en función del tiempo para el punto material del eje X de coordenada x = 80 cm., y el valor de dicha velocidad en el instante t = 20 s.

Solución

a. Para hallar la amplitud de la onda nos fijamos simplemente en la ecuación dada, de donde

A = 2 cm

Para hallar la frecuencia de la onda volvemos a fijarnos en la ecuación dada

$$\omega = \frac{\pi}{4} = 2\pi\cdot f \;\Rightarrow\; f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi/4}{2\pi} = \frac{1}{8} = 0{,}125\,\text{s}^{-1}$$

b. Para hallar la longitud de onda basta darse cuenta de que al decirnos que dos puntos que oscilan con un desfase de π radianes están separados una distancia <u>mínima</u> de 20 cm es como decir

$$\frac{\lambda}{2} = 20\,\text{cm} \;\Rightarrow\; \lambda = 40\,\text{cm}$$

Conocida la longitud de onda y la frecuencia, la velocidad es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\cdot f = 40\,\text{cm}\cdot 0{,}125\,\text{s}^{-1} = 5\,\text{cm}/\text{s}$$

c. La expresión matemática que representa la onda es $y(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega\,t - k\,x + \varphi_o)$, donde k es el número de onda $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}\,\text{cm}^{-1}\right)$, y φ_o es el desfase inicial, fijando otra vez la atención sobre la ecuación inicial, $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$, sustituyendo los valores conocidos se obtiene la expresión matemática de la onda:

$$y(x,t) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{20}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

d. La expresión para la velocidad se obtiene derivando la expresión de y(x, t) respecto del tiempo.

$$v_y = \frac{d\,y(x,t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{20}x + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{20}x + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{20}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Para x = 80 cm

$$v_y(x=80,t) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{20}80 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{7\pi}{2}\right)$$

Para t = 20 s

$$v_y(x=80,t=20) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}20 - \frac{7\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0$$

Septiembre 2009. Problema 1A.- Una onda armónica transversal de amplitud 8 cm y longitud de onda 140 cm se propaga en una cuerda tensa, orientada en el sentido positivo del eje X, con una velocidad de 70 cm/s. El punto de la cuerda de coordenada x = 0 (origen de la perturbación) oscila en la dirección del eje Y y tiene en el instante t = 0 una elongación de 4 cm y una velocidad de oscilación positiva. Determine:

- **a)** Los valores de la frecuencia angular y del número de onda.

b) La expresión matemática de la onda.
c) La expresión matemática del movimiento del punto de la cuerda situado a 70 cm del origen.
d) La diferencia de fase de oscilación, en un mismo instante, entre dos puntos de la cuerda que distan entre sí 35 cm.

Solución.

La ecuación de una onda armónica transversal viene dada por la expresión:

$$y = A\,\mathrm{sen}\,(\omega\,t \pm k\,x + \varphi_o)$$

donde A es la amplitud, ω es la velocidad angular, k es el número de onda y φ_o es el desfase inicial

a. A = 0,08 m; λ = 1,4 m. El número de onda se puede calcular por la expresión:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1{,}4} = \frac{10}{7}\pi\,\mathrm{rad}/\mathrm{m}$$

conocido el número de onda se calcula la velocidad angular.

$$v = \frac{\omega}{k} : k = v \cdot k = 0{,}7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{10}{7}\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}} = \pi\,\mathrm{rad}/\mathrm{s}$$

b. Para expresar la ecuación de la onda se necesita conocer el desfase inicial el cuál se puede calcular con los datos del enunciado (Para t = 0; x = 0; y = 4 cm = 4×10^{-2} m) aplicados a la ecuación general (el signo de la fase se escoge negativo debido a que la onda se propaga en el sentido positivo del eje OX.

$$4\times10^{-2} = 8\times10^{-2}\mathrm{sen}\left(\pi\cdot 0 - \frac{10}{7}\pi\cdot 0 + \varphi_o\right) : \mathrm{sen}\,\varphi_o = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_o = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}$$

Conocido el desfase la ecuación de la onda queda:

$$y = 8\times10^{-2}\mathrm{sen}\left(\pi\,t - \frac{10}{7}\pi\,x + \frac{\pi}{6}\right)$$

c. Para x = 70 cm = 70×10^{-2} m: $y = 8\times10^{-2}\mathrm{sen}\left(\pi\,t - \frac{10}{7}\pi\cdot 70\times10^{-2} + \frac{\pi}{6}\right)$

$$y = 8\times10^{-2}\mathrm{sen}\left(\pi\,t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

d.

$$\Delta\varphi = \left(\pi\,t_o - \frac{10\pi}{7}x_1 + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\pi\,t_o - \frac{10\pi}{7}x_2 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{10\pi}{7}x_2 - \frac{10\pi}{7}x_1 = \frac{10\pi}{7}(x_2 - x_1)$$

$$\Delta\varphi = \frac{10\pi}{7}\Delta x = \frac{10\pi}{7}\cdot 0{,}35 = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$$

Junio 2009. Cuestión 2.- Una fuente puntual emite un sonido que se percibe con nivel de intensidad sonora de 50 dB a una distancia de 10 m.

a) Determine la potencia sonora de la fuente.
b) ¿A qué distancia dejaría de ser audible el sonido?

Dato: Intensidad umbral de audición $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}

Solución.

a. Mediante la definición de nivel sonoro, se puede calcular la intensidad del sonido.

$$\beta = 10\cdot\log\frac{I}{I_o} : \; 50 = 10\cdot\log\frac{I}{10^{-12}} : \; I = 10^{-12}\cdot 10^{50/10} = 10^{-7}\,\mathrm{W}/\mathrm{m}^2$$

Teniendo en cuenta que la potencia P del foco se reparte en esferas concéntricas y que el medio es isótropo:

$$I = \frac{P_o}{4\pi r^2} : \; P_o = 4\pi r^2 I = 4\pi\cdot 10^2\cdot 10^{-7} = 1{,}26\times10^{-4}\,\mathrm{W}/\mathrm{m}^2$$

b. El sonido dejara de oírse a una distancia tal que la intensidad en ese punto sea menor o igual a la intensidad umbral

$$I = \frac{P_o}{4\pi r^2} \le I_o \ : \ r \ge \sqrt{\frac{P_o}{4\pi I_o}} = \sqrt{\frac{1{,}26\times 10^{-6}}{4\pi \cdot 10^{-12}}} = 316{,}7\ \text{m}$$

Modelo 2009. Cuestión 2.- La potencia de la bocina de un automóvil, que se supone *foco* emisor puntual, es de 0,1 W.

a) Determine la intensidad de la onda sonora y el nivel de intensidad sonora a una distancia de 8 m del automóvil.

b) ¿A qué distancias desde el automóvil el nivel de intensidad sonora es menor de 60 dB?

Dato: Intensidad umbral de audición $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}

Solución.

a. Suponemos un medio isótropo con ondas esféricas. En cualquier punto situado a una distancia r del foco que emisor, la intensidad valdrá:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P_o}{4\pi r^2} = \frac{0{,}1\text{W}}{4\pi \cdot 8^2\ \text{m}^2} = 1{,}24\times 10^{-4}\ \text{W}/\text{m}^2$$

La intensidad sonora es.

$$\text{db} = 10 \cdot \log \frac{I}{I_o} = 10 \cdot \log \frac{1{,}24\times 10^{-4}}{10^{-12}} = 81\text{db}$$

b. Se calcula la distancia en la cual la intensidad de la onda sonora es 60 db. Teniendo en cuenta que la intensidad es inversamente proporcional a la distancia, en cualquier punto más alejado, la intensidad será menor.

$$60\text{db} = 10 \cdot \log \frac{I}{I_o} : 6 = \log \frac{I}{I_o} : 10^6 = \frac{I}{10^{-12}} : I = 10^6 \cdot 10^{-12} = 10^{-6}\ \text{W}/\text{m}^2$$

$$I = \frac{P_o}{4\pi r^2} : r = \sqrt{\frac{P_o}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{10^{-1}}{4\pi \cdot 10^{-6}}} = 89{,}2\ \text{m}$$

$$r > 89{,}2\ \text{m}$$

Septiembre 2008. Problema 2B.- Una onda armónica transversal se propaga en una cuerda tensa de gran longitud y está representada por la siguiente expresión:

$y = 0{,}5\ \text{sen}\ (2\pi\, t - \pi\, x + \pi)$ (x e y en metros y t en segundos)

Determine:

a) La longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.

b) La diferencia de fase en un mismo instante entre las vibraciones de dos puntos separados entre sí $\Delta x = 1$ m.

c) La diferencia de fase de oscilación para dos posiciones de un mismo punto de la cuerda cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 2 s.

d) La velocidad máxima de vibración de cualquier punto de la cuerda.

Solución.

a. La longitud de onda se obtiene a partir del número de onda, y este por comparación de la ecuación general $(y = A\ \text{sen}\ (\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_o))$ con la ecuación de la onda.

$$\left.\begin{array}{l} y = A\text{sen}\left(\omega\, t - k\, x + \varphi_o\right) \\ y = 0{,}5\,\text{sen}\left(2\pi\, t - \pi\, x + \pi\right) \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} \omega = 2\pi\ \text{rad s}^{-1} \\ k = \pi\ \text{m}^{-1} \\ \varphi_o = \pi\ \text{rad} \end{array}\right.$$

El número de onda (k) se define como el número de longitudes de onda que hay en una distancia 2π:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \ : \ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ \text{m}$$

La velocidad de propagación de la onda es:

$$v=\frac{\lambda}{T}$$

El periodo se calcula a partir de la velocidad angular:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\ :\ T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2\pi}=1\,s$$

$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{2}{1}=2\,{}^{m}\!/\!_{s}$$

b. Para un punto cualquiera su fase es: $\varphi(x,t)=2\pi\,t-\pi\,x+\pi$, para otro punto situado a 1 m del anterior su fase es: $\varphi(x+1,t)=2\pi\,t-\pi\,(x+1)+\pi$. La diferencia de fase entre ellos será:

$$\Delta\varphi=\left|\varphi(x+1,t)-\varphi(x,t)\right|=\left|2\pi\,t-\pi\,(x+1)+\pi-(2\pi\,t-\pi\,x+\pi)\right|=\pi\,\text{rad}$$

c. Para un punto cualquiera su fase es: $\varphi(x,t)=2\pi\,t-\pi\,x+\pi$, para ese mismo punto, en el instante t + 2 su fase es: $\varphi(x,t+2)=2\pi\,(t+2)-\pi\,x+\pi$. La diferencia de fase entre ellos será:

$$\Delta\varphi=\left|\varphi(x,t+2)-\varphi(x,t)\right|=\left|2\pi\,(t+2)-\pi\,x+\pi-(2\pi\,t-\pi\,x+\pi)\right|=4\pi\,\text{rad}$$

d. La velocidad de vibración de in punto viene dado por la expresión:

$$v=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(0{,}5\,\text{sen}\,(2\pi\,t-\pi\,x+\pi)\right)=0{,}5\cos(2\pi\,t-\pi\,x+\pi)\cdot 2\pi=\pi\cos(2\pi\,t-\pi\,x+\pi)$$

La velocidad máxima se alcanza cuando la componente trigonométrica valga 1.

$$v_{máx}=\pi\,{}^{m}\!/\!_{s}$$

Junio 2008. Problema 2A.- Se realizan dos mediciones del nivel de intensidad sonora en las proximidades de un foco sonoro puntual, siendo la primera de 100 dB a una distancia x del foco, y la segunda de 80 dB al alejarse en la misma dirección 100 m más.

a) Obtenga las distancias al foco desde donde se efectúan las mediciones.
b) Determine la potencia sonora del foco.

Dato: Intensidad umbral de audición $I_o = 10^{-12}$ W/m^2

Solución.

a. La intensidad de una onda es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Para calcular la intensidad se tiene en cuenta la escala decibélica

$$\beta=10\log\frac{I}{I_o}\ :\ \frac{I}{I_0}=10^{\beta/10}\ :\ I=I_o\cdot 10^{\beta/10}$$

Donde β es el nivel de intensidad de sonido medido en decibelios, I es la intensidad e I_o es la intensidad umbral.

$$\beta_1=100\,dB\to I_1=10^{-12}\cdot 10^{100/10}=10^{-2}\,{}^{W}\!/\!_{m^2}\to r_1=x$$

$$\beta_2=80\,dB\to I_1=10^{-12}\cdot 10^{80/10}=10^{-4}\,{}^{W}\!/\!_{m^2}\to r_2=x+100$$

Sustituyendo en la relación:

$$\frac{10^{-2}}{10^{-4}}=\frac{(x+100)^2}{x^2}\ :\ 100=\left(\frac{x+100}{x}\right)^2\ :\ \frac{x+100}{x}=10\ :\ x=11{,}1\,m$$

b. $I=\dfrac{P}{4\pi r^2}$ Aplicando a la 1ª experiencia: $P=I_1\cdot 4\pi r_1^2=10^{-2}4\pi\cdot 11{,}1^2=15{,}5\,W$

Modelo 2008. Cuestión 2.- La expresión matemática que representa una onda armónica en unidades SI es:

$$y(x,t) = 0'04\,\text{sen}\left(2\pi\,t - \frac{\pi}{4}\,x\right)$$

Determine:

a) La frecuencia de la onda y su velocidad de propagación.

b) La distancia mínima entre dos puntos que vibran con una diferencia de fase de 120°.

Solución.

a. Comparando la expresión matemática de la onda armónica con la ecuación general, se pueden deducir los valores de la velocidad angular (ω) y del numero de onda (k). Conocida la velocidad angular se calcula la frecuencia (ν) y conocida la velocidad angular y el número de onda se calcula la velocidad de propagación de la onda (v).

$$\left.\begin{array}{r} y(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega\,t - k\,x) \\ y(x,t) = 0'04\,\text{sen}\left(2\pi\,t - \frac{\pi}{4}\,x\right) \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} \omega = 2\pi\,\text{rad}/\text{s} \\ k = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}/\text{m} \end{array}\right.$$

Frecuencia:

$$\omega = 2\pi\,\nu \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\,\text{Hz}\left(s^{-1}\right)$$

Velocidad de propagación:

$$k = \frac{\omega}{v} \qquad v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8\,\text{m}/\text{s}$$

b. Se denomina fase (φ) al paréntesis (ωt – kx). Su valor determina el estado de vibración o fase del movimiento. Para un instante t_o la diferencia de fase entre dos puntos viene dada por:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (\omega\,t_o - k\,x_1) - (\omega\,t_o - k\,x_2) = k\cdot(x_2 - x_1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \Delta\varphi = 120^o = \frac{2\pi}{3}\,\text{rad} \\ \Delta\varphi = k\cdot\Delta x \end{array}\right\} : \Delta x = \frac{\Delta\varphi}{k} = \frac{2\pi/3\,\text{rad}}{\pi/4\,\text{rad}/\text{m}} = \frac{8}{3}\,\text{m} = 2'67\,\text{m}$$

Septiembre 2007. Cuestión 2.- Una onda sinusoidal transversal en una cuerda tiene un período de 0,2 s y se propaga en el sentido negativo del eje X a una velocidad de 30 m/s. En el instante *t = 0,* la partícula de la cuerda en *x = 0* tiene un desplazamiento positivo de 0,02 m y una velocidad de oscilación negativa de 2 m/s. **a)** ¿Cuál es la amplitud de la onda? **b)** ¿Cuál es la fase inicial? **c)** ¿Cuál es la máxima velocidad de oscilación de los puntos de la cuerda? **d)** Escriba la función de onda correspondiente.

Solución.

a. La ecuación general de una onda que se desplaza en sentido negativo del eje x es:

$$y(x, t) = A\ \text{sen}\ (\omega t + kx + \varphi_o)$$

Utilizando los datos conocidos para las condiciones iniciales (t = 0; x = 0 ⇒ y(0, 0) = +0'02 m):

$$y(0, 0) = 0'02 = A\ \text{sen}\ \varphi_o$$

Si derivamos la ecuación de posición de la onda respecto del tiempo, obtenemos la expresión de la velocidad en función de x y t.

$$\frac{dy(x,t)}{dt} = v(x,t) = A\cos(\omega\,t + k\,x + \varphi_o)\cdot\omega = A\omega\cos(\omega\,t + k\,x + \varphi_o)$$

Utilizando el valor de la velocidad para condiciones iniciales (t = 0; x = 0 ⇒ v(0, 0) = –2 m/s):

$$v(0,0) = -2 = A\omega\cos\varphi_o$$

La velocidad angular (ω) se obtiene mediante su relación con el periodo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0'2\,s} = 10\pi \,{}^{rad}\!/_{s}$$

Sustituyendo en la expresión de la velocidad inicial:

$$v(0,0) = -2 = 10\pi A\cos\varphi_o$$

Dividiendo la ecuación de la posición entre la de la velocidad, obtenemos una expresión que nos permite calcular el valor de la fase (φ_o).

$$\frac{0'02}{-2} = \frac{A\,\text{sen}\,\varphi_o}{10\pi A\cos\varphi_o} \;:\quad -0'31 = \text{tg}\,\varphi_o \Rightarrow \varphi_o = \text{arctg}\,(-0'31) = \begin{cases} = 2{,}84\text{ rad} \\ = 5{,}98\text{ rad}\end{cases}$$

Para discernir cual de los dos desfases iniciales corresponde a la onda se tiene en cuenta que en condiciones iniciales, la posición es positiva y la velocidad negativa.

$$\varphi_o = 2{,}84\text{ rad} \qquad y = A\,\text{sen}\,2{,}84 > 0 \qquad v = A\omega\cos 2{,}84 < 0$$

$$\varphi_o = 5{,}98\text{ rad} \qquad y = A\,\text{sen}\,5{,}98 < 0 \qquad v = A\omega\cos 5{,}98 > 0$$

Teniendo en cuenta los signos de la posición y velocidad inicial, el desfase inicial es:

$$\varphi_o = 2{,}84\text{ rad}$$

Conocido el desfase, la expresión de la posición permite calcular la amplitud.

$$0'02 = A\,\text{sen}\,\varphi_o \Rightarrow A = \frac{0'02}{\text{sen}\,2{,}84} \approx 0'067\text{ m}$$

b. $\varphi_o = 2{,}84$ rad

c. El valor máximo de la velocidad $\left(v(x,t) = A\omega\cos(\omega t + k\,x + \varphi_o)\right)$ se alcanza cuando el coseno vale 1, y por tanto queda:

$$v_{máx} = A\omega = 0'067\text{ m}\cdot 10\pi \,{}^{rad}\!/_{s} \approx 2'1 \,{}^{m}\!/_{s}$$

d. Función de onda:

$$y(x, t) = A\,\text{sen}\,(\omega t + kx + \varphi_o)$$

Donde: $\omega = 10\pi$ rad/s; $k = \frac{\omega}{v} = \frac{10\pi}{30} = \frac{\pi}{3}\,m^{-1}$; $\varphi_o = 2{,}84$ rad

$$y(x,t) = 0'067\,\text{sen}\left(10\pi\,t + \frac{\pi}{3}x + 2{,}84\right)$$

Junio 2007. Problema 1A.- Un punto material oscila en torno al origen de coordenadas en la dirección del eje Y, según la expresión:

$$y = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (\text{ y en cm; t en s }),$$

originando una onda armónica transversal que se propaga en el sentido positivo del eje X. Sabiendo que dos puntos materiales de dicho eje que oscilan con un desfase de π radianes están separados una distancia mínima de 20 cm, determine:

- **a)** La amplitud y la frecuencia de la onda armónica. .
- **b)** La longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.
- **c)** La expresión matemática que representa la onda armónica.
- **d)** La expresión de la velocidad de oscilación en función del tiempo para el punto material del eje X de coordenada x = 80 cm, y el valor de dicha velocidad en el instante t = 20 s.

Solución

a. La amplitud y la frecuencia de la onda coinciden con la amplitud y frecuencia del movimiento oscilatorio.

$$A = 0{,}02\text{ m}$$

La frecuencia de la onda se calcula a partir de la velocidad angular.

$$\omega = \frac{\pi}{4} = 2\pi f \qquad f = \frac{1}{8} s^{-1} = 0{,}125\,\text{Hz}$$

b. Para hallar la longitud de onda basta darse cuenta de que al decirnos que dos puntos que oscilan con un desfase de π radianes están separados una distancia <u>mínima</u> de 20 cm es como decir

$$\frac{\lambda}{2} = 20\,\text{cm} \qquad \lambda = 40\,\text{cm} = 0{,}4\,\text{m}$$

Otra forma seria teniendo en cuenta que el incremento de fase en un instante dado es:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t - kx_1 + \varphi_o) - (\omega t - kx_2 + \varphi_o) = k(x_1 - x_2) = k \cdot \Delta x$$

Teniendo en cuenta $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x \;; \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi} \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{\pi} \cdot 0{,}2 = 0{,}4\,\text{m}$$

Conocida la longitud de onda y la frecuencia se calcula la velocidad de propagación de la onda.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = 0{,}4\,\text{m} \cdot 0{,}125\,\text{s}^{-1} = 0{,}05\,\text{m}/\text{s}$$

c. El número de onda es: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}4} = 5\pi\,\text{m}^{-1}$

La expresión matemática que representa la onda es:

$$y(x,t) = 0{,}02 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} t - 5\pi\, x + \frac{\pi}{2}\right)$$

d. La expresión para la velocidad se obtiene como la derivada de la función y respecto del tiempo.

$$v(x,t) = \frac{dy}{dt} = 0{,}02 \cdot \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} t - 5\pi\, x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{200} \cos\left(\frac{\pi}{4} t - 5\pi\, x + \frac{\pi}{2}\right) \text{m}/\text{s}$$

Para x = 0,8 m

$$v(0'8,t) = \frac{\pi}{200} \cos\left(\frac{\pi}{4} t - 5\pi \cdot 0{,}8 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{200} \cos\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{7\pi}{2}\right) \text{m}/\text{s}$$

Para x = 0,8 y t = 20 s

$$v(0'8, 20) = \frac{\pi}{20} 0 \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 20 - \frac{7\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{200} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{m}/\text{s} = \frac{\pi}{20} \cdot 0 = 0$$

Modelo 2007. Cuestión 2.- Una fuente sonora puntual emite con una potencia de 80 W. Calcule:

a) La intensidad sonora en los puntos distantes 10 m de la fuente.

b) ¿A qué distancia de la fuente el nivel de intensidad sonora es de 130 dB?

Datos: Intensidad umbral de audición $I_0 = 10^{-12}\,\text{W m}^{-2}$

Solución.

a) La **intensidad I** de un sonido puede medirse mediante la energía que transporta por unidad de superficie, se expresa en **W/m²**.

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{80}{4\pi (10)^2} = 6'4 \times 10^{-2}\,\text{W·m}^{-2}$$

b) El volumen acústico **ß** de un sonido de intensidad **I** expresado en Bels se define como:

$$\beta = \log \frac{I}{I_o} \quad \text{(Bels)}$$

Como la unidad resultaba demasiado grande, se utiliza el **decibelio** (décima parte del Bel) designado **dB** que ha quedado como unidad para la medida del volumen acústico. Así pues, el volumen acústico **ß** de un sonido de intensidad **I** expresado en decibles se define como:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_o} \quad (dB)$$

Siendo I_o la intensidad umbral de audición para el oído humano. Aplicando a los datos propuestos se despeja la intensidad:

$$130 = 10\log\frac{I}{10^{-12}} \ : \ 13 = \log\frac{I}{10^{-12}} \ : \ \frac{I}{10^{-12}} = 10^{13} \ : \ I = 10\ W\cdot m^{-2}.$$

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{P}{4\pi\cdot d^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{P}{4\pi\cdot I}} = \sqrt{\frac{80W}{4\pi\cdot 10Wm^{-2}}} = 0'8\ m$$

Modelo 2007. Problema 1A.- La expresión matemática que representa una onda armónica que se propaga a lo largo de una cuerda tensa es:

$$y(x,t) = 0{,}01\,\text{sen}(10\pi\,t + 2\pi x + \pi),$$

donde x e y están dados en metros y t en segundos. Determine:

a) El sentido y la velocidad de propagación de la onda.
b) La frecuencia y la longitud de onda.
c) La diferencia de tase de oscilación entre dos puntos de la cuerda separados 20 cm.
d) La velocidad y la aceleración de oscilación máximas de un punto de la cuerda.

Solución.

a) La ecuación general de una onda armónica es; $y(x, t) = A\ \text{sen}(\omega t - kx + \varphi_o)$, donde A es la amplitud, ω la velocidad angular, k el número de ondas y φ_o el desfase inicial.

Comparando la expresión general con la expresión propuesta:

$$A = 0'01\ m;\ \omega = 10\pi\ rad/s;\ k = -2\pi\ rad/m;\ \varphi_o = \pi\ rad.$$

- Sentido. El valor de k negativo indica que el sentido es de propagación es el negativo en la dirección x $\left(-\vec{i}\right)$.
- Velocidad de propagación. Por definición:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/k}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{k} = \frac{10\pi\ rad/s}{-2\pi\ rad/m} = -5\ m/s$$

“El signo negativo es debido al sentido de desplazamiento”

b) La frecuencia se obtiene a partir de la velocidad angular, y la longitud de onda del número de ondas.

$$\omega = 2\pi\cdot\nu \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\pi\ rad/s}{2\pi\ rad} = 5\ Hz\left(s^{-1}\right)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\ rad}{2\pi\ rad/m} = 1\ m$$

“En el calculo de la longitud de onda, no tiene sentido incluir el signo del número de ondas puesto que se trata de una longitud”

c) La diferencia de fase de oscilación en un instante dado (mismo tiempo) entre dos puntos viene dado por la diferencia entre sus fases.

El ángulo de **fase** de una onda es $(\omega t - k x + \varphi_o)$, por lo tanto la diferencia de fase es:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t - k x_2 + \varphi_o) - (\omega t - k x_1 + \varphi_o) = k(x_2 - x_1) = k\cdot\Delta x$$

Sustituyendo por los valores numéricos:

$$\Delta\varphi = k\cdot\Delta x = \{\Delta x = 20\ cm = 0'2\ m\} = 2\pi\ rad/m\cdot 0'2\ m = 0'4\pi\ rad$$

d) Por definición: $v(x,t) = \frac{d\,y(x,t)}{dt} = \frac{d}{dt}(A\ \text{sen}\ (\omega\,t - k\,x + \varphi_o)) = A\cdot\omega\cos(\omega\,t - k\,x + \varphi_o)$

La velocidad será máxima cuando $\cos(\omega t - kx + \varphi_o) = 1$.

$$v(x,t)_{max} = A \cdot \omega = 0'01 \, {}^{m}/_{rad} \cdot 10\pi \, {}^{rad}/_{s} = 0'1\pi \, {}^{m}/_{s}$$

$$a(x,t) = \frac{d\,v(x,t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A \cdot \omega \cos(\omega t - k x + \varphi_o)\right) = -A \cdot \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t - k x + \varphi_o)$$

La aceleración será máxima cuando $\operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_o) = 1$.

$$a(x,t)_{max} = -A \cdot \omega^2 = -0'01 \cdot (10\pi)^2 = -\pi^2 \, {}^{m}/_{s^2}$$

Septiembre 2006. Problema 1B.- Una onda armónica transversal se desplaza en la dirección del eje X en sentido positivo y tiene una amplitud de 2 cm, una longitud de onda de 4 cm y una frecuencia de 8 Hz. Determine:

- **a)** La velocidad de propagación de la onda.
- **b)** La fase inicial, sabiendo que para $x = 0$ y $t = 0$ la elongación es y = –2 cm.
- **c)** La expresión matemática que representa la onda.
- **d)** La distancia mínima de separación entre dos partículas del eje X que oscilan desfasadas $\pi/3$ rad.

Solución.

a. $v = \dfrac{\lambda}{T}$ $\quad T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125\,s$ $\quad v = \dfrac{0'04\,m}{0'125\,s}$ $\quad v = 0'32 \, {}^{m}/_{s}$

b. $y(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_o)$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$y(0,0) = A \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 - k \cdot 0 + \varphi_o) = A \operatorname{sen} \varphi_o \qquad y(0,0) = A \operatorname{sen} \varphi_o$$

$$-0{,}02 = 0{,}02 \operatorname{sen} \varphi_o \qquad \operatorname{sen} \varphi_o = -1 \qquad \varphi_o = \frac{3\pi}{2}$$

c. $y(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_o)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \cdot 8 = 16\pi \, {}^{rad}/_{s} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}04} = 50\pi \, m^{-1}$$

$$y(x,t) = 0{,}02 \operatorname{sen}\left(16\pi\, t - 50\pi\, x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

d. Las ecuaciones del movimiento de dos partículas del eje son:

$$y_1(x_1,t) = A \operatorname{sen}\left(\omega t - kx_1 + {}^{3\pi}/_{2}\right)$$

$$y_2(x_2,t) = A \operatorname{sen}\left(\omega t - kx_2 + {}^{3\pi}/_{2}\right)$$

La diferencia de sus fases es:

$$\Delta\varphi = \left(\omega t - kx_1 + {}^{3\pi}/_{2}\right) - \left(\omega t - kx_2 + {}^{3\pi}/_{2}\right) = k(x_1 - x_2) = k \cdot \Delta x$$

Teniendo en cuenta que $\Delta\varphi = {}^{\pi}/_{3}$ rad

$$\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{0'04}\Delta x \qquad \Delta x = \frac{0{,}04}{6} = 6{,}7 \times 10^{-3} m$$

Junio 2006. Cuestión 2.- Una onda sonora que se propaga en el aire tiene una frecuencia de 260 Hz.

- **a)** Describa la naturaleza de la onda sonora e indique cuál es la dirección en la que tiene lugar la perturbación, respecto a la dirección de propagación.
- **b)** Calcule el periodo de esta onda y su longitud de onda.

Datos: velocidad del sonido en el aire $v = 340 \text{ m s}^{-1}$

Solución.

Una onda sonora en una onda de presión, es decir es una perturbación periódica de la presión o la densidad del medio por el que se propaga. Además la dirección en que se produzca la perturbación coincide con la dirección de propagación

c) Calcule el periodo de esta onda y su longitud de onda.

Solución.

El periodo es la inversa de la frecuencia, por tanto

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{260\ \text{Hz}} = 3'85 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

La longitud de onda (λ) la calculamos a partir de la velocidad de propagación.

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad \Rightarrow \quad \lambda = v \cdot T = 340\ {}^{m}\!/_{s} \cdot 3'85 \times 10^{-3}\ \text{s} = 1'31\ \text{m}$$

Modelo 2006. Cuestión 2.- Razone si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

a) La intensidad de la onda sonora emitida por una fuente puntual es directamente proporcional a la distancia a la fuente.

b) Un incremento de 30 decibelios corresponde a un aumento de la intensidad del sonido en un factor 1000.

Solución.

a. **Falso:** Si eso fuera así a mayor distancia el sonido se oiría con mayor intensidad, y sabemos que no es así. De hecho, la intensidad de una onda sonora emitida por una fuente puntual es inversamente proporcional a la distancia a la fuente puntual elevada al cuadrado, pues una cantidad constante de energía se tiene que repartir en la superficie de una esfera de radio igual a la distancia a la fuente y esta superficie es proporcional al radio al cuadrado.

$$I = \frac{P}{4\pi R^2}$$

b. **Verdadero:** La formula que relaciona la intensidad en decibelios con la intensidad en unidades SI es:

$$I(\text{dB}) = 10 \log \frac{I(\text{S.I.})}{I_o}$$

Donde I_o es la intensidad umbral del oído humano en unidades SI.

Si $I_2(\text{dB}) - I_1(\text{dB}) = 30\text{dB} \Rightarrow$ (diferencia de 30dB)

$$30\text{dB} = 10 \log \frac{I_2(\text{SI})}{I_0} - 10 \log \frac{I_1(\text{SI})}{I_o} = 10\left[\log \frac{I_2(\text{SI})}{I_o} - \log \frac{I_1(\text{SI})}{I_o}\right]$$

Por las propiedades de los logaritmos tenemos que $\log A - \log B = \log \frac{A}{B}$

$$30 = 10 \log \frac{I_2(\text{SI})/I_o}{I_1(\text{SI})/I_o} \Rightarrow \log\left(\frac{I_2(\text{SI})}{I_1(\text{SI})}\right) = 3 \Rightarrow \frac{I_2(\text{SI})}{I_1(\text{SI})} = 10^3 = 1000$$

Septiembre 2005. Problema 1B. Dada la expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga en una cuerda tensa de gran longitud:

$$y = 0{,}03\text{sen}\ (2\pi t - \pi x),$$

donde x e y están expresados en metros y t en segundos.

a) ¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda?

b) ¿Cuál es la expresión de la velocidad de oscilación de las partículas de la cuerda? ¿cuál es la velocidad máxima de oscilación?

c) Para t = 0, ¿cuál es el valor del desplazamiento de los puntos de la cuerda cuando x = 0,5 m y x = 1 m?

d) Para x = l m, ¿cuál es el desplazamiento cuando t = 0,5 s?

Solución.

a. La expresión general de la onda armónica transversal es

$$y = A\ \text{sen}(\omega t - kx)$$

Identificando con la ecuación propuesta $y = 0{,}03\text{sen}\,(2\pi t - \pi x)$

$$\omega = 2\pi\ s^{-1} \qquad k = \pi\ m^{-1}$$

Por definición

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

siendo λ la longitud de onda, T el periodo y $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

La onda avanza con velocidad constante recorriendo la distancia λ en el tiempo T.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/k}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{k}$$

Sustituyendo los datos del enunciado

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\, s^{-1}}{\pi\, m^{-1}} = 2\ m/s$$

b. La velocidad de oscilación de las partículas es la derivada de su posición respecto del tiempo.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\cdot \text{sen}(\omega t - kx)\right) = A\omega\cdot\cos(\omega t - kx) = 0{,}06\pi\cdot\cos(2\pi t - \pi x)\, m/s$$

La máxima velocidad es cuando el coseno vale 1.

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\text{Máx}} = 0'06\pi\ m/s$$

c. Para $t = 0$ el desplazamiento del punto en la posición $x = 0{,}5$ m es:

$$y(x = 0'5\,m,\ t = 0\,s) = 0'03\,m\cdot \text{sen}(2\pi\cdot 0 - \pi\cdot 0'5) = 0'03\,m\cdot\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -0'03\,m$$

Para t = 0s y x = 1 m, el desplazamiento es:

$$y(x = 1\,m,\ t = 0\,s) = 0'03\,m\cdot\text{sen}(2\pi\cdot 0 - \pi\cdot 1) = 0'03\,m\cdot\text{sen}(-\pi) = 0\,m$$

d. Para x = 1 m y t = 0'5s, el desplazamiento es:

$$y(x = 1\,m,\ t = 0'5\,s) = 0'03\,m\cdot\text{sen}(2\pi\cdot 0'5 - \pi\cdot 1) = 0'03\,m\cdot\text{sen}\ 0 = 0\,m$$

Junio 2005. Cuestión 1.- El nivel de intensidad sonora de la sirena de un barco es de 60 dB a 10 m de distancia. Suponiendo que la sirena es un foco emisor puntual, calcule:

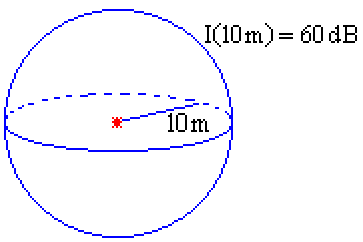
Dato: Intensidad umbral de *audición* $I_o = 10^{-12}\ W\,m^{-2}$.

a) El nivel de intensidad sonora a 1 Km de distancia.

b) La distancia a la que la sirena deja de ser audible.

Solución.

a.



Lo primero es pasar el nivel de intensidad al sistema internacional.

$$d\beta = 10\cdot\log\frac{I}{I_o} \qquad \text{se despeja tomando exponenciales} \qquad I = I_o\cdot 10^{d\beta/10}$$

donde $I_o = 10^{-12}\ W\,m^{-2}$

$$I = I_o \cdot 10^{d\beta/10} = 10^{-12} \cdot 10^{60/10} = 10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$$

Una vez conocida la intensidad en el sistema internacional de unidades, se calcula la potencia de la fuente.

$$P = I \cdot \text{Area} = I \cdot 4\pi \cdot R^2 = 10^{-6}\ \mathrm{w/m^2} \cdot 4\pi \cdot 10^2\ \mathrm{m^2} = 4\pi \times 10^{-4}\ \mathrm{W}$$

Teniendo en cuenta que la potencia de la fuente es constante, se calcula la intensidad a 1 Km.

$$I(1\,\mathrm{Km}) = \frac{\text{Potencia}}{A_{\text{Esfera}}(r = 1\,\mathrm{Km})} = \frac{4\pi \times 10^{-4}\ \mathrm{W}}{4\pi \cdot 10^6\ \mathrm{m^2}} = 10^{-10}\ \mathrm{W/m^2}$$

$$d\beta = 10 \cdot \log\frac{I}{I_o} = 10 \cdot \log\frac{10^{-10}}{10^{-12}} = 20\ d\beta$$

b. La sirena dejará de ser audible en donde $I = I_o$

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{P}{A} \\ I &= I_o \end{aligned}\right\} : A = \frac{P}{I_o} \qquad 4\pi \cdot r^2 = \frac{4\pi \times 10^{-4}}{10^{-12}} \qquad r = 10^4\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{Km}$$

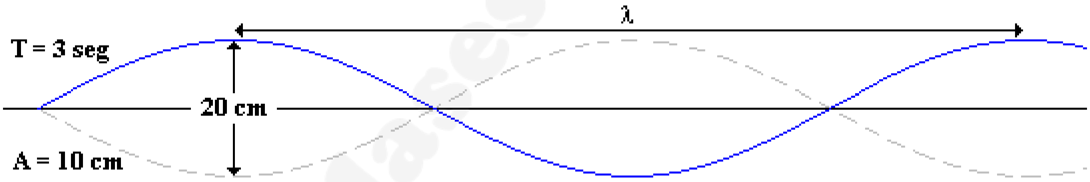
Junio 2005. Problema 1B.- Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda tensa de gran longitud, y por ello, una partícula de la misma realiza un movimiento armónico simple en la dirección perpendicular a la cuerda. El periodo de dicho movimiento es de 3 s y la distancia que recorre la partícula entre posiciones extremas es de 20 cm.

a) ¿Cuáles son los valores de la velocidad máxima y de la aceleración máxima de oscilación de la partícula?

b) Si la distancia mínima que separa dos partículas de la cuerda que oscilan en fase es de 60 cm, ¿cuál es la velocidad de propagación de la onda? ¿cuál es el número de onda?

Solución.

a.



Las partículas en el eje vertical realizan un m.a.s. por tanto su posición viene descrita por:

$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \phi_o)$$

donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, y el desfase inicial (ϕ_o) no influye en la resolución del problema.

Para calcular la velocidad y de la aceleración, se deriva $y(t)$ respecto del tiempo

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(A \cdot \operatorname{sen} \omega t) = A\omega \cdot \cos \omega t$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(A\omega \cdot \cos \omega tt) = -A\omega^2 \cdot \operatorname{sen} \omega t = -\omega^2 y$$

Por ser funciones trigonométricas, sus valores máximos se alcanzan cuando las razones seno o coseno valen 1 ó –1.

$$|v_{max}| = A\omega = A\,\frac{2\pi}{T} = 10^{-2}\,\mathrm{m}\,\frac{2\pi}{3\mathrm{seg}} = 0'021\ \mathrm{m/s}$$

$$|a_{max}| = +A\omega^2 = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 10^{-2}\,\mathrm{m}\left(\frac{2\pi}{3\,\mathrm{s}}\right)^2 = 0'044\ \mathrm{m^2/s}$$

b. La distancia mínima de dos puntos que están en fase es la longitud se onda λ, por tanto λ = 60 cm.

La velocidad de propagación de la onda se calcula con la ecuación:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{60\times10^{-2}\,\text{m}}{3\,\text{s}} = 0'2\ {}^{m}\!/_{s}$$

y el número de onda:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{60\times10^{-2}} = \frac{\pi}{30}\times10^2\ {}^{rad}\!/_{m}$$

Septiembre 2004. Cuestión 2. Una partícula oscila con movimiento armónico simple según el eje Y en torno al origen de coordenadas, originando una onda trasversal que se proponga en el sentido positivo del eje X con una velocidad de 20 m s^{-1}, una amplitud de 0,02 m y una frecuencia de 10 Hz. Determine:

- **a)** El periodo y la longitud de onda.
- **b)** La expresión matemática de la onda, si en t = 0 la partícula situada en el origen de coordenadas está en la posición máxima elongación positiva.

Solución.

a. Conocida la frecuencia, se calcula el periodo

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10\,s^{-1}} = 0{,}1\,s$$

Sabiendo que $v_p = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = v_p T = 20\ {}^{m}\!/_{s} \cdot 0'1\,s = 2\,m$

b. En $\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y(0{,}0) = A = 0'02$

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}(\omega\, t - k\, x + \varphi_o)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0'1} = 20\pi \qquad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/k}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \frac{20\pi}{20} = \pi$$

$$y(0{,}0) = A = A\cdot \text{sen}\,\varphi_o \Rightarrow \text{sen}\,\varphi_o = 1\ ;\ \ \varphi_o = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Sustituyendo se obtiene la ecuación de la onda

$$y(x,t) = 0{,}02\cdot\text{sen}\left(20\pi\, t - \pi\, x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Junio 2004. Problema 1A.- Una onda trasversal se propaga a lo largo de una cuerda horizontal, en el sentido negativo del eje de abscisas, siendo 10 cm la distancia mínima entre dos puntos que oscilan en fase. Sabiendo que la onda esta generada por un foco emisor que vibra con un movimiento armónico simple de frecuencia 50 Hz y una amplitud de 4 cm, determine:

- **a)** La velocidad de propagación de la onda.
- **b)** La expresión matemática de la onda, si el foco emisor se encuentra en el origen de coordenadas, y en t = 0 la elongación es nula.
- **c)** La velocidad máxima de oscilación de una partícula cualquiera de la cuerda.
- **d)** La aceleración máxima de oscilación en un punto cualquiera de la cuerda.

Solución.

a. La distancia mínima entre dos puntos que oscilan en fase es la longitud de onda.

$$\lambda = 0{,}1\ \text{m};\ f = 50\ \text{Hz};\ A = 0{,}04\ \text{m}$$

La velocidad de propagación de la onda es $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\cdot f = 0{,}1\cdot 50 = 5\ {}^{m}\!/_{s}$

b. $y(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega\, t + k\, x + \varphi_o)$ El signo positivo del número de onda es debido a que se desplaza en el sentido negativo del eje x.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi\cdot 50 = 100\pi\ {}^{rad}\!/_{s} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}04} = 50\pi\ m^{-1}$$

$$y(0,0) = A\ \text{sen}\,(\omega \cdot 0 + k \cdot 0 + \varphi_o) \qquad A\ \text{sen}\ \varphi_o = 0 : \begin{cases} \varphi_o = 0\ \text{rad} \\ \varphi_o = \pi\ \text{rad} \end{cases}$$

Las posibles ecuaciones de la onda serán:

$$y(x,t) = 0{,}04\ \text{sen}\,(100\pi\,t + 50\pi\,x) \quad \text{ó} \quad y(x,t) = 0{,}04\ \text{sen}\,(100\pi\,t + 50\pi\,x + \pi)$$

c. La velocidad de vibración se halla derivando respecto del tiempo:

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cos(\omega t + kx + \varphi_o) \Rightarrow v_{max} = \{\cos(\omega t + kx) = 1\} = A \cdot \omega = A \cdot 2\pi f = 0'04 \times 50 \times 2\pi = 12'56\ m/s$$

d. La aceleración se halla derivando la velocidad respecto del tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \text{sen}(\omega t + kx + \varphi_o) \Rightarrow a_{máx} = A\omega^2 = A \cdot 4\pi^2 \cdot f^2 = 0'04 \times 4\pi^2 \times 50^2 = 1256'63\ m/s^2$$

Modelo 2004. Cuestión 2.- Una onda armónica unidimensional esta dada, en el sistema SI de unidades, por la expresión:

$$y(x,t) = 4\text{sen}(50t - 4x)$$

Determine: **a)** la amplitud; **b)** el periodo; **c)** la longitud de onda; **d)** la velocidad de propagación.

Solución.

La ecuación de la onda unidimensional es:

$$y(x,t) = 4\text{sen}(50t - 4x)$$

lo cual indica que es una onda que se propaga en la dirección positiva del eje x. (–4x)

a. Si comparamos esta ecuación, con la ecuación general de una onda:

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}(\omega t - kx)$$

identificando se obtiene la amplitud:

$$A = 4m$$

b. De la ecuación, identificando se obtiene el valor de la velocidad angular:

$$\omega = 50\ \text{rad/s}$$

Conocida la relación entre ω y T:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50} \qquad T = \frac{\pi}{25}\ \text{seg}$$

c. De la ecuación de la onda: $k = 4\ m^{-1}$ y su relación con la longitud de onda(λ) pedida es:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ m$$

d. La velocidad de propagación de la onda viene expresada por la siguiente relación:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

Conocidos ambos valores:

$$v = \frac{50}{4} \quad : \quad v = 12'5\ m/s$$

Septiembre 2003. Cuestión 2. La expresión matemática de una onda armónica es $y(x,t) = 3\,\text{sen}\,(200\pi t - 5x + \pi)$, estando todas las magnitudes en unidades SI. Determine:

a) la frecuencia y la longitud de onda.

b) La amplitud y la velocidad de programación de la onda.

Solución.

$$y(x,t) = 3 \cdot \text{sen}\,(\overbrace{200\pi}^{\omega} \cdot t - \overbrace{5}^{k} \cdot x + \pi)$$

a. Identificando los términos de la expresión dada, con la ecuación general:

$$y(x,t) = A\,\text{sen}\left(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_o\right)$$

se obtiene:

$$\omega = 200\pi \,{}^{rad}\!/\!_{seg}$$

Puesto que $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$, sustituyendo:

$$\nu = \frac{200\pi}{2\pi} \qquad \nu = 100\text{Hz}$$

De la identificación, también se obtiene:

$$k = 5$$

Y puesto que: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\lambda = \frac{2\pi}{5}\,\text{m}$$

b. Identificando en la ecuación de la onda: A = 3m.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/k}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{k} = \frac{200\pi}{5} \qquad v = 40\pi\,{}^{m}\!/\!_{s}$$

Junio 2003. Cuestión 2. El periodo de una onda trasversal que se proponga en una cuerda tensa es de 2×10^{-3}s. Sabiendo, además, que dos puntos consecutivos cuya diferencia de fase vale π/2 rad están separados una distancia de 10 cm, calcule:

- **a)** La longitud de onda
- **b)** La velocidad de propagación.

Solución.

a. $T = 2\times10^{-3}\,\text{s} \qquad \Delta\varphi = {}^{\pi}\!/\!_{2}\,\text{rad} \qquad \Delta x = 0{,}1\,\text{m}$

La diferencia de fase entre dos puntos en un mismo instante es:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \left(\omega t - kx_2\right) - \left(\omega t - kx_1\right) = k\left(x_1 - x_2\right) = k \cdot \Delta x$$

$$k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{\pi/2}{0{,}1} = 5\pi\,\text{m}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5\pi} = 0{,}4\text{m}$$

b. $v_P = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{0{,}4\,\text{m}}{2\times10^{-3}\,\text{s}} = 200\,{}^{m}\!/\!_{s}$

Septiembre 2002. Cuestión 1.- Se tiene una onda armónica trasversal que se prolonga en una cuerda tensa. Si se reduce a la mitad su frecuencia, razone que ocurre con:

- **a)** el periodo
- **b)** la velocidad de programación
- **c)** la longitud de onda
- **d)** la amplitud.

Solución.

Se tiene una onda transversal que se propaga en una cuerda tensa. Si reducimos a la mitad la frecuencia:

$$f' = \frac{f}{2}$$

a. El periodo se relaciona con la frecuencia mediante: $T = \dfrac{1}{f}$

Sí la frecuencia se reduce a la mitad su nuevo periodo será $T' = \dfrac{1}{f'}$, sustituyendo el valor de f´:

$$T' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f/2} = \frac{2}{f} = 2 \cdot \frac{1}{f} = 2T$$

El periodo se duplica

b. La velocidad de fase o velocidad de propagación por la cuerda, no depende de la frecuencia, únicamente de las propiedades del medio por el que se propaga la onda (elasticidad y rigidez), en el caso de la cuerda: $v = \sqrt{F/m}$, donde F representa la tensión de la cuerda. Por tanto, v' = v, la velocidad no cambian.

c. La longitud de onda se relaciona con la frecuencia mediante la expresión:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}$$

teniendo en cuenta que:

$$\lambda' = \frac{v'}{f'} : \left\{ \begin{array}{l} v' = v \\ f' = \frac{f}{2} \end{array} \right\} : \lambda' = \frac{v}{f/2} = 2 \cdot \frac{v}{f} = 2 \cdot \lambda$$

la longitud de onda también se duplica

d. La relación entre la amplitud y la frecuencia la hallamos a partir de:

$$E = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

despejando la amplitud

$$A^2 = \frac{2E}{K} \quad \text{y teniendo en cuenta que} : \left\{ \begin{array}{l} K = m\omega^2 \\ \omega = 2\pi f \end{array} \right. \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{m \cdot 4\pi^2 f^2}} = \sqrt{\frac{2E}{m \cdot 4\pi^2}} \cdot \frac{1}{f}$$

suponiendo constante la energía y la masa, $\left(\sqrt{\frac{2E}{m \cdot 4\pi^2}} = cte \right)$, la amplitud se relaciona con la frecuencia según

$$A = cte \frac{1}{f}$$

teniendo en cuenta $f' = \frac{f}{2}$

$$A' = cte \frac{1}{f'} = cte \frac{1}{f/2} = 2 \cdot cte \frac{1}{f} = 2 \cdot A$$

la amplitud también se duplica.

Septiembre 2002. Cuestión 4.- Una bolita de 0'1 g de masa cae desde una altura de 1 m, con velocidad inicial nula. Al legar al suelo el 0'05 por ciento de su energía cinética se convierte en un sonido de duración 0'1 s.

a) Halle la potencia sonora general.

b) Admitiendo que la onda sonora generada puede aproximarse a una onda esférica, estime la distancia máxima a la que puede oírse la caída de la bolita si el ruido de fondo sólo permite oír intensidades mayores que 10^{-8} W/m^2.

Datos: Aceleración de la gravedad g = 9'8 m s^{-2}

Solución.

a. La potencia del sonido es: $P = \frac{E}{t}$. La energía, es el 0'05% de la energía cinética de la bolita al caer al suelo, con lo cual, y por la conservación de la energía mecánica:

$$E_p(h = 1m) = E_c(h = 0)$$

ya que la velocidad inicial la consideramos nula (no tiene energía cinética inicial) por tanto:

$$E_c = m \cdot g \cdot h$$

sustituyendo por los datos, se calcula su valor

$$E_c\ (\text{suelo}) = 9'8 \cdot 10^{-4}\ \text{J.}$$

El 0’05% de esta cantidad, se transforma en energía sonora:

$$E\ (\text{sonido}) = \frac{0'05}{100}\ x9'8 \cdot 10^{-4}\ J \qquad E(\text{sonido}) = 4'9 \cdot 10^{-7}\ J$$

Y la potencia es entonces:

$$P = \frac{E(\text{sonido})}{t} \qquad P = \frac{4'9 \cdot 10^{-7}\ J}{0'1\ \text{seg}}$$

$$P = 4'9 \times 10^{-6}\ W$$

b. La intensidad de una onda esférica se amortigua con la distancia al foco r, de la forma:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Si despejamos r, para el valor de la intensidad limite audible, $I = 10^{-8}\ {W}/{m^2}$:

$$r^2 = \frac{P}{4\pi I} \qquad r = 6'24\ m$$

A partir de este radio, ya no es audible el sonido generado por la bolita.

Junio 2002. Cuestión 2. Escriba la expresión matemática de una onda armónica unidimensional como un función de x (distancia) y t (tiempo) y que contenga las magnitudes indicadas en cada uno de los siguientes apartados:

- **a)** frecuencia angular ω y velocidad de programación v.
- **b)** periodo T y longitud de onda λ.
- **c)** frecuencia angular ω y número de onda k.
- **d)** Explique por qué es una función doblemente periódica.

Solución.

La ecuación de una onda armónica unidimensional puede escribirse en función de varias variables, la forma más habitual es la pedida en el apartado (c)

c. $$y(x,t) = A \cdot \text{sen}(\omega\, t \pm k\, x + \varphi_o)$$

b. Si utilizamos las expresiones que relacionan ω con T, y K con λ:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

y las sustituimos en la expresión anterior:

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\, t \pm \frac{2\pi}{\lambda}\, x + \varphi_o\right)$$

sacando factor común 2π:

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}\left(2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} + \varphi_o\right)\right)$$

a. Por ultimo, de la expresión obtenida en el apartado b), y utilizando la relación entre λ y la velocidad de propagación de la onda:

$$\lambda = v \cdot T$$

sustituyendo:

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}\left(2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{v \cdot T} + \varphi_o\right)\right)$$

sacando factor común del periodo(T):

$$y(x,t) = A\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\left(t \pm \frac{x}{v} + \varphi_o\right)\right)$$

y sabiendo que $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

queda:

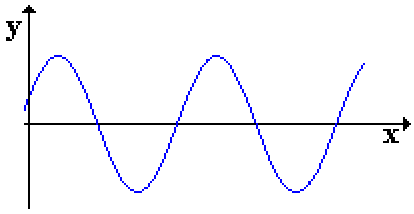
$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}\left(\omega\left(t \pm \frac{x}{v} + \quad {}_o\right)\right)$$

d. Para comprobar que es doblemente periódica en x y t, se representa la onda y (y , t_o) para un instante determinado de tiempo (“si se hace una foto de la onda”) de manera que la elongación “y” sea sólo función de x.

Para t = t_o

$$y(x, t_o) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t_o \pm kx + \varphi_o)$$

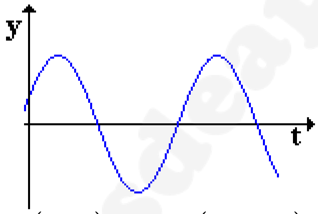
función sen:



$$y(x, t_o) = A \cdot \text{sen}(\text{cte} \pm k \cdot x + \varphi_o)$$

Si en cambio, elegimos un punto concreto x = x_o, la función elongación “y” es una función periódica del tiempo.

Para x = x_o:



$$y(x_o, t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm \text{cte})$$

Por está duplicidad a la hora de expresar la elongación, se puede decir que la función es doblemente periódica.

Modelo 2002. Cuestión 2.- Una fuente sonora puntual emite con una potencia de 10^{-6}W. Determine el nivel de intensidad expresado en decibelios a 1 m de la fuente sonora.
¿A qué distancia de la fuente sonora el nivel de intensidad se ha reducido a la mitad del valor anterior?
Dato: La intensidad umbral de audición es $I_0 = 10^{-12}$W m^{-2}
Solución

El nivel de intensidad sonora es $\beta = 10 \log \frac{I}{I_o}$

La intensidad se calcula a partir de la potencia $I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10^{-6}}{4\pi \cdot 1^2} 7{,}96 \times 10^{-8}$

$$\beta = 10 \log \frac{7{,}96 \times 10^{-8}}{10^{-12}} = 49$$

Para que la intensidad sonora se reduzca a la mitad, la intensidad deberá ser:

$$I = I_o \cdot 10^{\beta/2 / 10} = 10^{-12} \cdot 10^{49/2 / 10} = 2{,}82 \times 10^{-10}$$

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{10^{-6}}{4\pi \cdot 2{,}82 \times 10^{-10}}} = 16{,}8\text{m}$$

Septiembre 2001. Problema 1A.- La expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga por una cuerda tensa orientada según el eje X es:

$y = 0{,}5\ \text{sen}\ (6\pi\, t - 2\pi x)$ (x, y en metros; t en segundos)

Determine:

a) Los valores de la longitud de onda y de la velocidad de propagación de la onda.
b) Las expresiones que representan la elongación y la velocidad de vibración en función del tiempo, para un punto de la cuerda situado a una distancia x=1,5 m del origen.
c) Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de vibración de los puntos de la cuerda.
d) La distancia mínima que separa dos puntos de la cuerda que, en un mismo instante, vibran desfasados 2π radianes.

Solución.

$$y = 0'5\,\text{sen}\left(\overbrace{6\pi}^{\omega}\cdot t - \overbrace{2\pi}^{k}\cdot x\right) \qquad v = \frac{dy}{dt} = 0'5\cos(6\pi t - 2\pi x)\cdot 6\pi$$

a. La longitud de onda, puesto que $k = 2\pi$ será:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1\text{m}$$

Teniendo en cuenta que $\omega = 6\pi$

$$v = \omega/k \qquad v = 3\, m/s$$

b. Para un punto x = 1’5 m.

$$y(1'5, t) = 0'5\cdot \text{sen}\,(6\pi t - 2\pi\cdot 1'5) = 0'5\cdot \text{sen}(6\pi t - 3\pi)$$
$$v(1'5, t) = 3\pi\cdot \cos(6\pi t - 2\pi 1'5) = 3\pi\cdot\cos(6\pi t - 3\pi)$$

c. Según la expresión anterior para la velocidad:

$$v(x, t) = 3\pi\cdot\cos(6\pi t - 2\pi x)$$

tiene el valor máximo: $v_{\text{máx}} = 3\pi\, m/s$ (cuando el coseno vale 1)

La aceleración de un punto de la cuerda:

$$a = -\omega^2\cdot y$$

tiene un valor máximo(en valor absoluto) en $y(x, t) = A$, y en y(x,t) = - A

$$a = -(6\pi)^2\cdot(\pm 0'5) \qquad |a| = 18\pi^2 \qquad |a| = 177'6\, m/s^2$$

d. Si fijamos el tiempo en la ecuación de la onda: t_o

$$\left.\begin{array}{l} y(x_1, t_o) = 0'5\cdot\text{sen}(6\pi\cdot t_o - 2\pi x_1) \\ y(x_2, t_o) = 0'5\cdot\text{sen}(6\pi\cdot t_o - 2\pi x_2)\end{array}\right\}\text{para dos puntos de la cuerda } x_1 \text{ y } x_2$$

La diferencia de fase: $(6\pi t_o - 2\pi X_1) - (6\pi t_o - 2\pi X_2) = \Delta\varphi$

Si se sabe que $\Delta\varphi = 2\pi$, entonces:

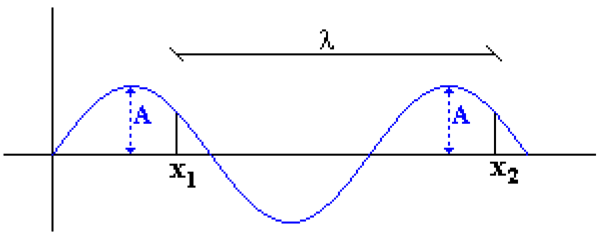
$$2\pi(X_2 - X_1) = 2\pi$$

Así que, la distancia mínima entre los dos puntos tiene que ser:

$$\Delta X = (X_2 - X_1) = 1\text{m}$$

que equivalente a la longitud de onda de la onda armónica:

$$k = 2\pi \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad \lambda = 1\text{m}$$



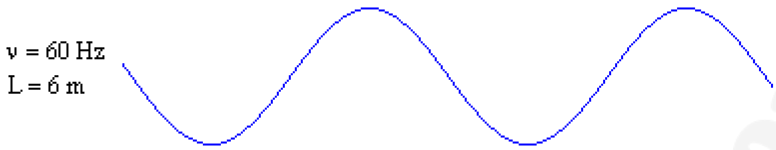
Septiembre 2000. Cuestión 2. Uno de los extremos de una cuerda tensa, de 6 m de longitud, oscila transversalmente con un movimiento armónico simple de frecuencia 60 Hz. Las ondas generadas alcanzan el otro extremo de la cuerda en 0,5 s. Determine:

a) La longitud de onda y el número de onda de las ondas de la cuerda.

b) La diferencia de fase de oscilación existente entre dos puntos de la cuerda separados 10 cm.

Solución.

a.



La velocidad de programación de la onda:

$$v = \frac{\lambda}{T} \qquad v = \frac{L}{t} = \frac{6\text{ m}}{0'5\text{ seg}} \qquad v = 12\, {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

si la $\nu = 60\text{Hz}$ $\qquad T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{60}\text{seg}$

teniendo en cuenta que

$$\lambda = v \cdot T \qquad \lambda = 12\, {}^{m}\!/\!{}_{s} \cdot \frac{1}{60}\text{seg} \qquad \lambda = 0'2\text{m}$$

conocida la longitud de onda, el número de ondas es:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad k = \frac{2\pi}{0'2} = 10\pi \qquad k = 31'42$$

b. Si se considera la ecuación de la onda que genera el M.A.S. para un punto x y otro punto situado a 10 cm, x + 0'1:

$$\begin{cases} y(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t + \varphi_o) \\ y(x + 0'1, t) = A\text{sen}(k[x + 0'1] - \omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

donde las fases son, respectivamente, $(kx - \omega t + \varphi_0)$ y $(k[x + 0'1] - \omega t + \varphi_0)$, la diferencia de fase entre esos dos puntos se halla restando sus fases:

$$\Delta\varphi = [k[x + 0'1] - \omega t + \varphi_0] - [kx - \omega t + \varphi_0] = 0'1k$$

$$\Delta\varphi = 0'1 \cdot 10\pi \qquad \Delta\varphi = \pi$$

Junio 2000. Cuestión 2. Una onda transversal que se propaga en una cuerda, coincidente con el eje X, tiene por expresión matemática: y(x, t) = 2·sen (7t – 4x), en unidades SI. Determine:

a) La velocidad de propagación de la onda y la velocidad máxima de vibración de cualquier punto de la cuerda.

b) El tiempo que tarda la onda en recorrer una distancia igual a la longitud de onda.

Solución.

$$y(x,t) = 2\,\text{sen}\,(7t - 4x)$$

a. Para hallar la velocidad de la onda y la velocidad máxima de vibración de un punto de la onda se tiene en cuenta:

$$\lambda = v \cdot T \quad : \quad v = \frac{\lambda}{T}$$

conocidos λ y T, se determina la velocidad de propagación.

De la ecuación de la onda, se determina la velocidad angular

$$\omega = 7\, {}^{rad}\!/\!{}_{s}$$

con la velocidad angular se determina el periodo

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

de modo que:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7}\,\text{seg}$$

Del valor de k, se obtiene la longitud de onda

$$k = 4m^{-1} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{4} \qquad \lambda = \pi/2\ \text{m}$$

y con los valores de λ y T, la velocidad de propagación:

$$v = \frac{\lambda}{T} \qquad v = \frac{\pi/2}{2\pi/7} \qquad v = 7/4\ \text{m/s}$$

La velocidad máxima de un punto de la cuerda, se halla derivando la expresión de la elongación, y calculando el valor máximo.

$$v(x,t) = \frac{d}{dt}y(x,t) = \frac{d}{dt}\left[2\cdot \text{sen}(7t-4x)\right] = 2\cdot 7\cdot \cos(7t-4x) = 14\cdot\cos(7t-4x)$$

el máximo de la expresión se obtiene cuando la función trigonométrica vale 1

$$\cos(7t-4x) = 1 \Rightarrow v_{máx} = 14\cdot 1 = 14\ \text{m/s}$$

b. Se pide calcular el periodo, que es el tiempo que tarda una onda en recorrer una distancia igual a su longitud de onda.
Del apartado anterior:

$$T = 2\pi/7\ \text{seg} \qquad T = 0'898\,\text{seg}$$