Septiembre 2013. Pregunta 2B.- La velocidad de una partícula que describe un movimiento armónico simple alcanza un valor máximo de 40 cm s^{-1}. El periodo de oscilación es de 2,5 s. Calcule:

a) La amplitud y la frecuencia angular del movimiento.

b) La distancia a la que se encuentra del punto de equilibrio cuando su velocidad es de 10 cm s^{-1}.

Solución.

a. La expresión matemática de un movimiento armónico simple es:

$$y(t) = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_o)$$

La velocidad del m.a.s. es la derivada de la posición con respecto al tiempo.

$$v(t) = \frac{d\,y(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_o)) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_o)$$

La expresión de la velocidad máxima será cuando la parte trigonométrica de la ecuación valga 1.

$$v_{max} = A\omega$$

La velocidad angular o frecuencia angular se puede calcular a partir del periodo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}5} = \frac{4\pi}{5}\,\text{rad/s}$$

Conocida la velocidad angular, se calcula la amplitud del movimiento a partir de la velocidad máxima.

$$v_{max} = A\omega \qquad A = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{40\times10^{-2}}{4\pi/5} = \frac{1}{2\pi} \approx 0.16\,\text{m} = 16\,\text{cm}$$

b. Partiendo de la expresión de la velocidad y operando con la ecuación se puede obtener una ecuación que relaciona la velocidad y la posición.

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_o) \text{ Elevando al cuadrado } v^2 = A^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_o)$$

Por trigonometría se transforma el coseno en seno:

$$v^2 = A^2\omega^2\left(1 - \text{sen}^2(\omega t + \varphi_o)\right) \qquad v^2 = \omega^2\left(A^2 - \underbrace{A^2\text{sen}^2(\omega t + \varphi_o)}_{x^2}\right) \qquad v^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

La última expresión permite despejar x en función de v

$$A^2 - x^2 = \frac{v^2}{\omega^2} \quad ; \quad x^2 = A^2 - \frac{v^2}{\omega^2} \quad ; \quad x = \sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 - \frac{\left(10\times10^{-2}\right)^2}{(4\pi/5)^2}} = 0{,}154\,\text{m} = 15{,}4\,\text{cm}$$

Junio 2013. Pregunta 2B.- En el extremo libre de un resorte colgado del techo, de longitud 40 cm, se cuelga un objeto de 50 g de masa. Cuándo el objeto esta en posición de equilibrio con el resorte, este mide 45 cm. Se desplaza el objeto desde la posición de equilibrio 6 cm hacia abajo y se suelta desde el reposo. Calcule:

a) El valor de la constante elástica del resorte y la función matemática del movimiento que describe el objeto.

b) La velocidad y la aceleración al pasar por el punto de equilibrio cuando el objeto asciende.

Solución.

a. $l_o = 0{,}4\,\text{m} \quad m = 50\,\text{g} \quad l = 0{,}45\,\text{m} \quad A = 0{,}06\,\text{m}$

$$F = k\cdot\Delta l \qquad k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{50\times10^{-3}\cdot 9{,}8}{0{,}05} = 9{,}8\,\text{N/m}$$

La función matemática del movimiento es: $y(t) = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_o)$

$$\left.\begin{array}{l} F = m\cdot a \\ a = -\omega^2 x \\ F = -k\cdot x \end{array}\right\} : -m\omega^2 x = -kx \ ; \ k = m\omega^2 \ ; \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{50\times10^{-3}}} = 14\,\text{rad/s}$$

Para calcular el desfase inicial, se tiene en cuenta que:

$$\left.\begin{array}{r} y(t) = A\,\text{sen}\,(\omega\,t + \varphi_o) \\ \text{Para } t = 0,\ y(0) = -A \end{array}\right\}: -A = A\,\text{sen}\,(\omega \cdot 0 + \varphi_o) \qquad \text{sen}\,\varphi_o = -1 \Rightarrow \varphi_o = -\frac{\pi}{2}\,\text{rad}$$

$$y(t) = 0{,}06\,\text{sen}\left(14t - \frac{\pi}{2}\right)$$

b. En el punto de equilibrio: $\begin{cases} v = v_{máx} \\ a = 0 \end{cases}$

$$y(t) = A\,\text{sen}\,(\omega\,t + \varphi_o)$$

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(A\,\text{sen}\,(\omega\,t + \varphi_o)) = A\omega\cos(\omega\,t + \varphi_o)$$

$$v_{max} \Leftrightarrow \cos(\omega\,t + \varphi_o) = 1\ ;\ \ v_{max} = A \cdot \omega = 0{,}06 \cdot 14 = 0{,}84\ m\,s^{-1}$$

Modelo 2013. Pregunta 2A.- Un objeto está unido a un muelle horizontal de constante elástica 2×10^4 Nm^{-1}. Despreciando el rozamiento:

- **a)** ¿Qué masa ha de tener el objeto si se desea que oscile con una frecuencia de 50 Hz? ¿Depende el periodo de las oscilaciones de la energía inicial con que se estire el muelle? Razone la respuesta.
- **b)** ¿Cuál es la máxima fuerza que actúa sobre el objeto si la amplitud de las oscilaciones es de 5 cm?

Solución.

a. Teniendo en cuenta la Ley de Hooke, el 2º principio de la dinámica y la expresión de la aceleración en un movimiento armónico simple (MAS), se obtiene una relación para la constante elástica en función de la masa y la velocidad angular.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} F = -k\,x \\ F = m\,a \end{array}\right\}: -k\,x = m\,a \\ a = -\omega^2 x \end{array}\right\}: -k\,x = -m\,\omega^2 x \Rightarrow k = m\,\omega^2$$

$$\left.\begin{array}{r} k = m\,\omega^2 \\ \omega = 2\pi\,f \end{array}\right\}: k = m\,(2\pi\,f)^2 \Rightarrow m = \frac{k}{4\pi^2 f^2} = \frac{2\times10^4}{4\pi^2 \cdot 50^2} = 0{,}2\ kg$$

El periodo de oscilación no depende de la energía inicial con la que se estire el muelle, depende de la masa unida al muelle y de la constante recuperadora del muelle.

$$\left.\begin{array}{r} k = m\,\omega^2 \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\}: k = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

b. Aplicando la ley de Hooke ($F = -kx$), si $x = A \Rightarrow F = F_{max}$

$$F_{max} = -k \cdot A = -2\times10^4 \cdot 0{,}05 = -1000N$$

Septiembre 2012. Pregunta 1A.- Un objeto de 100 g de masa, unido al extremo libre de un resorte de constante elástica k, se encuentra sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se estira, suministrándole una energía elástica de 2 J, comenzando a oscilar desde el reposo con un periodo de 0,25 s. Determine:

- **a)** La constante elástica y escriba la función matemática que representa la oscilación.
- **b)** La energía cinética cuando han transcurrido 0,1 s.

Solución.

a. Teniendo en cuenta la Ley de Hooke, el 2º principio de la dinámica y la expresión de la aceleración en un movimiento armónico simple (MAS), se obtiene una relación para la constante elástica en función de la masa y la velocidad angular.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} F = -k\,x \\ F = m\,a \end{array}\right\}: -k\,x = m\,a \\ a = -\omega^2 x \end{array}\right\}: -k\,x = -m\,\omega^2 x \Rightarrow k = m\,\omega^2$$

$$\left.\begin{array}{r} k = m\,\omega^2 \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} : k = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 100\times10^{-3}\cdot\left(\frac{2\pi}{0{,}25}\right)^2 = 63{,}17\ \mathrm{N\,m^{-1}}$$

La posición de un MAS viene dada por la expresión:

$$x(t) = A\ \mathrm{sen}\,(\omega\,t + \varphi_o)$$

El valor de la energía mecánica suministrada al estirar el muelle, permite calcular la amplitud (A) de movimiento.

$$E_M = \frac{1}{2} k\,A^2 \qquad A = \sqrt{\frac{2E_M}{k}} = \sqrt{\frac{2\cdot 2}{63{,}17}} = 0{,}25\ \mathrm{m}$$

Para calcular el desfase inicial (φ_o), se tiene en cuenta que la masa empieza a oscilar desde la posición de elongación máxima *"Se estira, suministrándole una energía elástica de 2 J, comenzando a oscilar desde el reposo"*.

$$x(t=0) = A = A\mathrm{sen}(\omega\cdot 0 + \varphi_o) \qquad \mathrm{sen}\ \varphi_o = 1 \qquad \varphi_o = \frac{\pi}{2}$$

La velocidad angular (ω) se calcular a partir del periodo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}25} = 8\pi\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$$

Sustituyendo en la expresión de la posición, se obtiene la función matemática que representa la oscilación.

$$x(t) = 0{,}25\,\mathrm{sen}\left(8\pi\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

b. El apartado se puede resolver por dos caminos diferentes:

- Mediante la definición de energía cinética, calculando la velocidad para t = 1 s:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0{,}25\cdot\mathrm{sen}\left(8\pi\,t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0{,}25\cdot\cos\left(8\pi\,t + \frac{\pi}{2}\right)\cdot 8\pi = 2\pi\cdot\cos\left(8\pi\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v(0{,}1) = 2\pi\cdot\cos\left(8\pi\cdot 0{,}1 + \frac{\pi}{2}\right) = -3{,}7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\cdot 100\times10^{-3}\cdot(-3{,}7)^2 = 0{,}7\ \mathrm{J}$$

- Expresando la energía cinética en función de la posición:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\,A^2\omega^2\cos^2(\omega\,t + \varphi_o) = \frac{1}{2} K\,A^2\left(1 - \mathrm{sen}^2(\omega\,t + \varphi_o)\right) = \frac{1}{2} K\left(A^2 - A^2\mathrm{sen}^2(\omega\,t + \varphi_o)\right)$$

$$E_c = \frac{1}{2} K\left(A^2 - x^2\right)$$

La posición para t = 0,1 s es:

$$x(0{,}1) = 0{,}25\,\mathrm{sen}\left(8\pi\cdot 0{,}1 + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}2$$

Sustituyendo en la expresión se obtiene la energía cinética.

$$E_c = \frac{1}{2} K\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2} 63{,}2\cdot\left(0{,}25^2 - (-0{,}2)^2\right) = 0{,}7\ \mathrm{J}$$

Nota: Para que en los cálculos coincidan ambos resultados se tienen dos opciones, o arrastrar los datos en todos los cálculos utilizando todos los decimales, o redondear los resultados a la primera cifra decimal.

Modelo 2012. Pregunta 2A.- Un objeto de 2 kg de masa unido al extremo de un muelle oscila a lo largo del eje *X* con una amplitud de 20 cm sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El objeto tarda 9 s en completar 30 oscilaciones, y en el instante de tiempo $t = 0$ su posición era $x_o = +10$ cm y su velocidad positiva. Determine:

a) La velocidad del objeto en el instante $t = 1,2$ s.

b) La energía cinética máxima del objeto.

Solución.

$$A = 20 \text{ cm} \qquad T = \frac{9}{30} = 0,3\,\text{s}$$

$$\text{Si } t = 0: \begin{cases} y = 10\,\text{cm} = 0,1\,\text{m} \\ v > 0 \end{cases}$$

a. Para calcular la velocidad del objeto en un instante determinado (t = 1,2 s) es necesario conocer la ecuación que describe el movimiento.

El objeto realiza un movimiento armónico simple que viene descrito por la ecuación:

$$y = A\,\text{sen}\,(\omega\,t + \varphi_o)$$

Donde A = 20 cm = 0,2 m; $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,3} = \frac{20\pi}{3}\,\text{rad}/\text{s}$; y el desfase inicial se calcula con los datos de condiciones iniciales.

Para t = 0: $y = 0,1 = 0,2\,\text{sen}\,(\omega \cdot 0 + \varphi_o)$: $\text{sen}\,\varphi_o = \frac{1}{2} : \begin{cases} \varphi_o = \frac{\pi}{6} \\ \varphi_o = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$

Las posibles expresiones de la posición son:

$$y = 0,2\,\text{sen}\left(\frac{20\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \qquad y = 0,2\,\text{sen}\left(\frac{20\pi}{3}t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

El signo de la velocidad para t = 0 nos permite deducir cual de las dos expresiones es la que corresponde al movimiento

La expresión de la velocidad, es la derivada de la posición respecto del tiempo.

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0,2\,\text{sen}\left(\frac{20\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 0,2\frac{20\pi}{3}\cos\left(\frac{20\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}\cos\left(\frac{20\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0,2\,\text{sen}\left(\frac{20\pi}{3}t + \frac{5\pi}{6}\right)\right) = 0,2\frac{20\pi}{3}\cos\left(\frac{20\pi}{3}t + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}\cos\left(\frac{20\pi}{3}t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\text{Para } t = 0: \begin{cases} v = \frac{4\pi}{3}\cos\left(\frac{20\pi}{3}\cdot 0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} > 0 \\ v = \frac{4\pi}{3}\cos\left(\frac{20\pi}{3}\cdot 0 + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{6} < 0 \end{cases}$$

- Posición: $y = 0,2\,\text{sen}\left(\frac{20\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$
- Velocidad: $v = \frac{4\pi}{3}\cos\left(\frac{20\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$

Para t = 1,2: $v(t = 1,2) = \frac{4\pi}{3}\cos\left(\frac{20\pi}{3}\cdot 1,2 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}\cos\left(8\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3,6\,\text{m s}^{-1}$

b. Se puede hacer de dos formas distintas:

- Por definición de energía cinética: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

$$E_c(\text{máx}) = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2$$

$$\left.\begin{array}{r} v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_o) \\ v_{\text{máx}} \Leftrightarrow \cos(\omega t + \varphi_o) = 1 \end{array}\right\} : v_{\text{máx}} = A\omega$$

$$E_c(\text{máx}) = \frac{1}{2} m (A\omega)^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}2^2 \cdot \left(\frac{20\pi}{3}\right)^2 = 17{,}5\ \text{J}$$

- Por conservación de energía. $E_c(\text{máx}) = E_p(\text{max}) = \frac{1}{2} kA^2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \ :\ k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 2}{0{,}3^2} = 877{,}3\ \text{N m}^{-1}$$

$$E_c(\text{máx}) = E_p(\text{max}) = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} 877{,}3 \cdot 0{,}2^2 = 17{,}5\ \text{J}$$

Septiembre 2011. Cuestión 1B.- Se dispone de un oscilador armónico formado por una masa m sujeta a un muelle de constante elástica k. Si en ausencia de rozamiento se duplica la energía mecánica del oscilador, explique que ocurre con:

a) La amplitud y la frecuencia de las oscilaciones.

b) La velocidad máxima y el periodo de oscilación.

Solución.

a. La energía mecánica del oscilador viene expresada por $E_m = \frac{1}{2} KA^2$. Si se duplica la energía mecánica $E'_m = \frac{1}{2} KA'^2$, comparando ambas expresiones:

$$\frac{E'_m}{E_m} = \frac{\frac{1}{2} KA'^2}{\frac{1}{2} KA^2} \ :\ E'_m = 2E_m \ :\ 2 = \frac{A'^2}{A^2} \ :\ A' = \sqrt{2} \cdot A$$

La amplitud aumenta.

La frecuencia depende de la constante recuperadora del oscilador y de la masa, como estas no varían, la frecuencia tampoco.

$$\frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

b. La velocidad máxima viene dada por $|v_{\text{máx}}| = A \cdot \omega$, Si aumentamos la energía mecánica, la nueva velocidad máxima vendrá expresada por $|v'_{\text{máx}}| = A' \cdot \omega'$, comparando:

$$\frac{|v'_{\text{máx}}|}{|v_{\text{máx}}|} = \frac{A' \cdot \omega'}{A \cdot \omega}$$

Teniendo en cuenta que $A' = \sqrt{2} \cdot A$ y que $\omega' = \omega$ ya que K y m permanecen constantes

$$\frac{|v'_{\text{máx}}|}{|v_{\text{máx}}|} = \sqrt{2} \ :\ |v'_{\text{máx}}| = \sqrt{2} \cdot |v_{\text{máx}}|$$

La velocidad máxima de oscilador aumenta.

Si la frecuencia permanece constante, el periodo también permanece constante.

Junio 2011. Problema 1A.- Se tiene una masa m = 1 kg situada sobre un plano horizontal sin rozamiento unida a un muelle, de masa despreciable, fijo por su extremo a la pared, Para mantener estirado el muelle una longitud de x = 3 cm, respecto de su posición en equilibrio, se requiere una fuerza de F = 6 N. Si de deja el sistema masa-muelle en libertad:

a) ¿Cuál es el periodo de oscilación de la masa?

- **b)** Determine el trabajo realizado por el muelle desde la posición inicial, x = 3 cm, hasta su posición de equilibrio, x = 0.
- **c)** ¿Cuál será el módulo de la velocidad de la masa cuando se encuentre a 1 cm de su posición de equilibrio?
- **d)** Si el muelle se hubiese estirado inicialmente 5 cm, ¿cuál sería su frecuencia de oscilación?

Solución.

a. El periodo de oscilación del muelle se obtiene a partir de la constante recuperadora del muelle.

$$k = \omega^2 m \;\; ; \;\; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La constante k se obtiene aplicando la ley de Hooke $(F = -k \cdot x)$ a los datos el enunciado. Usando la expresión en módulo:

$$|F| = k \cdot x \;\; ; \;\; k = \frac{|F|}{x} = \frac{6\ N}{3\times 10^{-2}\ m} = 200\ {}^{N}\!/_{m}$$

Conocido el valor de K y la masa se calcula el periodo.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{200}} = 0{,}44\ s$$

b. $W = -\Delta E_p = -\left(E_p(\text{final}) - E_p(\text{inicial})\right) = -\left(\frac{1}{2}k \cdot x_f^2 - \frac{1}{2}k \cdot x_i^2\right) =$

$$-\left(\frac{1}{2}200 \cdot 0^2 - \frac{1}{2}200 \cdot \left(3\times 10^{-2}\right)^2\right) = 0{,}09\ J$$

c. Conocida la energía mecánica $\left(E_m = \frac{1}{2}k \cdot A^2\right)$ y la posición (Energía potencial), se puede calcular la energía cinética y de esta obtener la velocidad

$$E_m = E_p + E_c$$

$$\frac{1}{2}k \cdot A^2 = \frac{1}{2}k \cdot x^2 + \frac{1}{2}m \cdot v^2$$

$$\frac{1}{2}200 \cdot 0{,}03^2 = \frac{1}{2}200 \cdot 0{,}01^2 + \frac{1}{2}1 \cdot v^2$$

$$v^2 = 0{,}16 \;\; ; \;\; v = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4\ {}^{m}\!/_{s}$$

d. Según pone de manifiesto la relación utilizada en el apartado a $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$, el periodo, y por tanto la frecuencia depende de k y m, y no de la amplitud, por lo tanto la frecuencia será la misma

$$\nu = 1/T = 1/0{,}44 = 2{,}27\ Hz$$

Modelo 2011. Cuestión 1A. Un cuerpo de masa 250 g unido a un muelle realiza un movimiento armónico simple con una frecuencia de 5 Hz. Si la energía total de este sistema elástico es 10 J:

- **a)** ¿Cuál es la constante elástica del muelle?
- **b)** ¿Cuál es la amplitud del muelle?

Solución.

a. Combinando la 2ª ley de la dinámica y la Ley de Hooke, se halla una relación entre la constante recuperadora y el periodo.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l} F = m \cdot a \\ a = -\omega^2 x \end{array}\right\} : F = -m \cdot \omega^2 x \\ F = -K \cdot x \end{array}\right\} : K = m \cdot \omega^2 \;\; : \;\; \omega = 2\pi \cdot f$$

$$K = m \cdot (2\pi \cdot f)^2 = 4\pi^2 m\, f^2 = 4\pi^2 \cdot 0{,}250 \cdot 5^2 = 246{,}7\ Nm^{-1}$$

b. Conociendo la energía mecánica y la constante, se calcula la amplitud.

$$E_T = \frac{1}{2}KA^2 \;:\; A = \sqrt{\frac{2E_m}{K}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10}{246{,}7}} = 0{,}285\,\text{m}$$

Septiembre 2010 F.M. Cuestión 1A.- Una partícula que realiza un movimiento armónico simple de 10 cm de amplitud tarda 2 s en efectuar una oscilación completa. Si en el instante t = 0 su velocidad era nula y la elongación positiva, determine:

- **a)** La expresión matemática que representa la elongación en función del tiempo.
- **b)** La velocidad y la aceleración de oscilación en el instante t = 0,25 s.

Solución.

a. A = 10 cm; T = 2 s; Para T = 0: $\begin{cases} v = 0 \\ x > 0 \end{cases}$

La expresión matemática de la elongación en función del tiempo tiene por expresión:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega\,t + \varphi_o)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,\text{rad}/\text{s}$$

Para calcular el desfase inicial (φ), se tienen en cuenta los datos de que para t = 0, la velocidad es nula y la elongación positiva.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)\right) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t=0) = A\omega\cos(\omega\cdot 0 + \varphi_o) = A\omega\cos\varphi_o = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi_o = 0 : \begin{cases} \varphi_o = \pi/2 \\ \varphi_o = -\pi/2 \end{cases}$$

Para saber cual desfase corresponde al movimiento propuesto, se tiene en cuenta que para t = 0, la elongación es positiva

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si} \quad = \pi/2 : x(t=0) = A\,\text{sen}\left(\omega\cdot 0 + \pi/2\right) = A\,\text{sen}\,\pi/2 = A\cdot 1 = A \\ \text{Si} \quad = -\pi/2 : x(t=0) = A\,\text{sen}\left(\omega\cdot 0 - \pi/2\right) = A\,\text{sen} - \pi/2 = A\cdot(-1) = -A \end{array}\right\} : x > 0 \Leftrightarrow \quad = \pi/2 :$$

La elongación en función del tiempo viene dada por la expresión:

$$x(t) = 0{,}1\,\text{sen}\left(\pi\,t + \pi/2\right)$$

b. $v(t) = A\omega\cos(\omega\,t + \quad) = 0{,}1\,\pi\cos\left(\pi\,t + \pi/2\right)$

$$v(t = 0{,}25) = 0{,}1\,\pi\cos\left(\pi\cdot 0{,}25 + \pi/2\right) = \frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{20}\,\text{m}/\text{s}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\omega\cos(\omega\,t + \quad)\right) = -A\omega^2\text{sen}\,(\omega\,t + \quad) = -0{,}1\,\pi^2\text{sen}\left(\pi\,t + \pi/2\right)$$

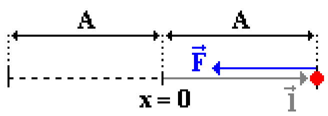
$$a(t = 0{,}25) = -0{,}1\,\pi^2\text{sen}\left(\pi\cdot 0{,}25 + \pi/2\right) = -\frac{\pi^2}{10}\text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}\pi^2}{20}\,\text{m}/\text{s}^2$$

Septiembre 2010 F.G. Problema 2A.- Una partícula se mueve en el eje X, alrededor del punto x = 0, describiendo un movimiento armónico simple de periodo 2 s, e inicialmente se encuentra en la posición de elongación máxima positiva. Sabiendo que la fuerza máxima que actúa sobre la partícula es 0,05 N y su energía total 0,02 J, determine:

- **a)** La amplitud del movimiento que describe la partícula.
- **b)** La masa de la partícula.
- **c)** La expresión matemática del movimiento de la partícula.
- **d)** El valor absoluto de la velocidad cuando se encuentre a 20 cm de la posición de equilibrio.

Solución.

a. La amplitud del movimiento se puede obtener a partir de la fuerza máxima y la energía mecánica total. La fuerza a la que se ve sometida la partícula esta expresada por la ley de Hook (F = –k · x), alcanzando su valor máximo cuando la elongación se iguala a la amplitud.



$$F_{máx} = -k \cdot A$$

Las fuerzas involucradas en el movimiento armónico simple son centrales y, por tanto, conservativas. En consecuencia, la expresión de la energía potencial en función de la elongación (x), se obtiene integrado la expresión de la fuerza con respecto a la elongación y cambiándola de signo.

$$E_P = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

En el punto de elongación máxima (x = A), toda la energía mecánica es potencial (v = 0), obteniendo una expresión para la energía mecánica total en función de la amplitud.

$$E_T = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

Con las expresiones de la fuerza máxima y la energía mecánica se plantea un sistema que permite despejar la amplitud, que se toma en valor absoluto.

$$\left.\begin{array}{l} F_{máx} = -k \cdot A \\ E_T = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \end{array}\right\} : \frac{E_P}{F_{máx}} = \left| \frac{\frac{1}{2} k \cdot A^2}{-k \cdot A} \right| = \frac{A}{2} : \left\{ \begin{array}{l} E_T = 0{,}02\ J \\ F_{máx} = 0{,}05\ N \end{array} \right\} : \frac{0{,}02\ J}{0{,}05\ N} = \frac{A}{2} : \ A = 0{,}8\ m$$

b. El valor de la masa se puede obtener a partir de la constante ($k = m\,\omega^2$)

$$\left.\begin{array}{l} k = m\,\omega^2 \\ E_T = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \end{array}\right\} : E_T = \frac{1}{2} m\,\omega^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^2 = \frac{2\pi^2 m\,A^2}{T^2}$$

$$E_T = \frac{2\pi^2 m\,A^2}{T^2} \ : \ m = \frac{T^2 \cdot E_T}{2\pi^2 \cdot A^2} = \frac{2^2 \cdot 0{,}02}{2\pi^2 \cdot 0{,}8^2} = 6{,}3 \cdot 10^{-3}\ kg$$

c. Ecuación general del movimiento armónico simple: $x = A\ sen\,(\omega\,t + \varphi)$

$$A = 0{,}8\ m$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ {}^{rad}\!/_{s}$$

Desfase inicial: Para $t = 0 \Rightarrow x = A$: $A = A\ sen\,(\pi \cdot 0 + \varphi)$

$$sen\ \varphi = 1 \ : \ \ \varphi = arcsen\,1 = \frac{\pi}{2}$$

Sustituyendo los valores se obtiene la ecuación del movimiento armónico simple

$$x = 0{,}8\,sen\left(\pi\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

d. A partir de la energía cinética se puede obtener una expresión de la velocidad en función de la posición.

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \left\{ v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A\ sen\,(\omega\,t + \varphi)) = A\,\omega \cos(\omega\,t + \varphi) \right\} = \frac{1}{2} m\,(A\,\omega \cos(\omega\,t + \varphi))^2$$

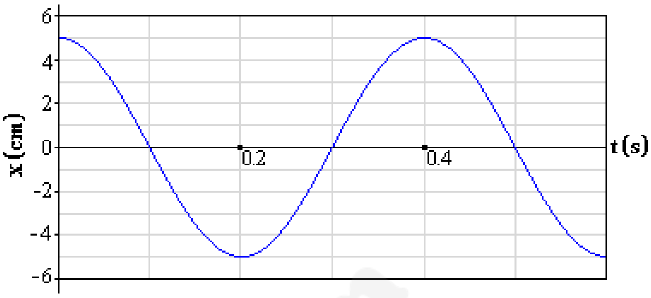
$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\,(A\,\omega \cos(\omega\,t + \varphi))^2 \ : \ \ v^2 = A^2 \omega^2 \cos^2(\omega\,t + \varphi)$$

Teniendo en cuenta: $\cos^2(\omega\,t + \varphi) = 1 - sen^2(\omega\,t + \varphi)$

$$v^2 = A^2\omega^2\left(1 - sen^2(\omega\,t + \varphi)\right) : \ \ v^2 = \omega^2\left(A^2 - \underbrace{A^2 sen^2(\omega\,t + \varphi)}_{x^2}\right) \ : \ \ v^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pi\sqrt{0{,}8^2 - 0{,}2^2} = 2{,}4\ {}^{m}\!/_{s}$$

Junio 2010. La gráfica muestra el desplazamiento horizontal: x = x(t) respecto del equilibrio de una masa de 0,5 kg unida a un muelle.



a) Obtenga la constante elástica del muelle
b) Determine la energía cinética y potencial del sistema en el instante: t = 0,25 s.

Solución.

a. La constante del muelle se puede relacionar con la masa y la frecuencia angular (ω)

$$k = m \cdot \omega^2 = \left\{ \omega = \frac{2\pi}{T} \right\} = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$$

En la gráfica adjunta se puede leer el periodo T = 0,4 s

$$k = 0{,}5 \cdot \frac{4\pi^2}{0{,}4^2} = 123{,}37\ \text{N/m}$$

b. La energía potencial viene dada por la expresión:

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

La posición de la partícula esta expresada por la ecuación:

$$x(t) = A\ \text{sen}(\omega\, t + \varphi_o)$$

Donde: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}4} = 5\pi\ \text{rad/s}$

De la gráfica adjunta: A = 0,05 m

El desfase inicial, se obtiene teniendo en cuenta que x(t = 0) = A

$$x(0) = A\ \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_o) = A \qquad \text{sen}\ \varphi_o = 1 \qquad \varphi_o = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

La posición de la partícula viene dada por: $x(t) = 0{,}05\ \text{sen}\left(5\pi\, t + \frac{\pi}{2} \right)$

$$x(0{,}25) = 0{,}05\ \text{sen}\left(5\pi\, 0{,}25 + \frac{\pi}{2} \right) = 0{,}05\ \text{sen}\ \frac{7\pi}{2} = -0{,}05 \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}035\ \text{m}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 123{,}37 \cdot (-0{,}035)^2 = 0{,}077\ \text{J}$$

La energía cinética se calcula teniendo en cuenta que la suma de energía cinética y potencial es la energía mecánica, que se puede calcular como energía potencial máxima.

$$E_{\text{mecánica}} = E_{\text{potencial}} + E_{\text{cinética}} \qquad E_{\text{mecánica}} = E_{\text{potencial}}(\text{máxima}) = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

$$E_{\text{cinética}} = E_{\text{mecánica}} - E_{\text{potencial}} = \frac{1}{2} k \cdot A^2 - E_{\text{potencial}}$$

$$E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2} 123{,}37 \cdot 0{,}05^2 - 0{,}077 = 0{,}077\ \text{J}$$

Junio 2010 F.M. Cuestión 1B.- Una partícula realiza un movimiento armónico simple. Si la frecuencia de oscilación se reduce a la mitad manteniendo constante la amplitud de oscilación, explique qué ocurre con: **a)** el periodo; **b)** la velocidad máxima; **c)** la aceleración máxima y **d)** la energía mecánica de la partícula.

Solución.

$$f = \frac{f_o}{2}$$

a. Periodo. El periodo es inverso a la frecuencia

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_o/2} = 2 \frac{1}{f_o} = 2T_o$$

El periodo se duplica.

b. Velocidad máxima. Para un movimiento armónico simple, la velocidad es la derivada de la posición respecto del tiempo.

$$v = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\,sen\left(\omega t + \varphi_o\right)\right) = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi_o\right)$$

La velocidad será máxima cuando la componente trigonométrica sea 1

$$v_{máx} = A\omega$$

La velocidad angular se puede expresar en función de la frecuencia ($\omega = 2\pi f$).

$$v_{máx} = A 2\pi f = 2\pi A f$$

$$v_{máx} = 2\pi A f = 2\pi A \frac{f_o}{2} = \frac{2\pi A f_o}{2} = \frac{v_{máx_o}}{2}$$

La velocidad máxima se reduce a la mitad.

c. Aceleración máxima. Siguiendo un procedimiento análogo al apartado anterior de calcula la aceleración máxima.

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\omega \cos\left(\omega t + \varphi_o\right)\right) = -A\omega^2\,sen\left(\omega t + \varphi_o\right)$$

$$a = a_{máx} \Leftrightarrow sen\left(\omega t + \varphi_o\right) = 1$$

$$a_{máx} = -A\omega^2$$

Sustituyendo ω por $2\pi f$:

$$a_{máx} = -A(2\pi f)^2 = -4\pi^2 A f^2 = -4\pi^2 A\left(\frac{f_o}{2}\right)^2 = \frac{-4\pi^2 A f_o^2}{4} = \frac{a_{máx_o}}{4}$$

La aceleración máxima se reduce la cuarta parte.

d. Energía mecánica. $E_m = \frac{1}{2} k \cdot A^2$ La dinámica permite expresar k en función de ω y m ($k = \omega^2 m$).

$$E_m = \frac{1}{2}\omega^2 m \cdot A^2 = \{\omega = 2\pi f\} = \frac{1}{2}(2\pi f)^2 m \cdot A^2 = 2\pi^2 f^2 m A^2$$

$$E_m = 2\pi^2 f^2 m A^2 = 2\pi^2\left(\frac{f_o}{2}\right)^2 m A^2 = \frac{2\pi^2 f_o^2 m A^2}{4} = \frac{E_{m_o}}{4}$$

La energía mecánica se reduce la cuarta parte.

Junio 2010 F.G. Problema 1A.- Un sistema masa-muelle está formado por un bloque de 0,75 kg de masa, que se apoya sobre una superficie horizontal sin rozamiento, unido a un muelle de constante recuperadora K. Si el bloque se separa 20 cm de la posición de equilibrio, y se le deja libre desde el reposo, éste empieza a oscilar de tal modo que se producen 10 oscilaciones en 60 s. Determine:

a) La constante recuperadora K del muelle.
b) La expresión matemática que representa el movimiento del bloque en función del tiempo.
c) La velocidad y la posición del bloque a los 30 s de empezar a oscilar.
d) Los valores máximos de la energía potencial y de la energía cinética alcanzados en este sistema oscilante.

Solución.

Movimiento armónico simple. $\begin{cases} m = 0{,}75\,Kg \\ A = 20\times 10^{-2}\,cm \\ f = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}\,s^{-1} \end{cases}$

a. Según la ley de Hooke F = –Kx, siendo K la constante recuperadora y x la elongación del muelle. Teniendo en cuenta el 2º principio de la dinámica F = m a, e igualando:

$$-K\,x = m\,a$$

Si se aplica la igualdad al punto de elongación máxima:

$$-K\,x_{máx} = m\,a_{máx}$$

Si la masa unida al muelle inicia un movimiento armónico simple, la posición, velocidad y aceleración vienen dados por:

- Posición o elongación: $x = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi)$; $x_{máx} = A$
- Velocidad: $v = \dfrac{dx}{dt} = A\,\omega \cos(\omega t + \varphi)$; $v_{máx} = A\,\omega$
- Aceleración: $a = \dfrac{dv}{dt} = -A\,\omega^2\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi)$; $a_{máx} = -A\,\omega^2$

Si en la igualdad se sustituyen los valores de $x_{máx}$ y $a_{máx}$ por las expresiones obtenidas del movimiento armónico simple:

$$-K \cdot A = m \cdot \left(-A\,\omega^2\right)$$

Simplificando: $K = m\,\omega^2$

La velocidad angular se puede expresar en función de la frecuencia. $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$$K = m\,(2\pi f)^2 = 4\pi^2 m\, f^2 = 4\pi^2\,0{,}75\,\mathrm{Kg} \cdot \left(\frac{1}{6}\,s^{-1}\right)^2 = 0{,}82\ \mathrm{N}/\mathrm{m}$$

b. $x(t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi)$: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}\ \mathrm{rad}/\mathrm{s}$

Para determinar la fase inicial se tiene en cuenta que para t = 0 la elongación es máxima, y por tanto la parte trigonométrica de la expresión debe ser uno.

$$\text{Para } t = 0:\ x = x_{máx} = A \Leftrightarrow \mathrm{sen}\,(\omega 0 + \varphi) = 1 :\ \mathrm{sen}\,\varphi = 1 :\ \varphi = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$$

$$x(t) = 0{,}2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} t + \frac{\pi}{2}\right)$$

c. $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = A\,\omega \cos(\omega t + \varphi) = 0{,}2 \cdot \dfrac{\pi}{3} \cos\left(\dfrac{\pi}{3} \cdot 30 + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{30} \cos\left(10\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{30} \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

$x = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi) = 0{,}2\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} 30 + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0{,}2\,\mathrm{sen}\left(10\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0{,}2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{2} = 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}2\ \mathrm{m}$

d. $E_c(máx) = E_p(máx) = E_m(máx) = \dfrac{1}{2} K\,A^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}016\ \mathrm{J}$

Modelo 2010 Cuestión 1A.- Un sistema elástico, constituido por un cuerpo de masa 200 g unido a un muelle, realiza un movimiento armónico simple con un periodo de 0,25 s. Si la energía total del sistema es 8 J:

a) ¿Cuál es la constante elástica del muelle?
b) ¿Cuál es la amplitud del movimiento?

Solución.

a) Si se aplica la Ley de Hooke $(F = -k \cdot x)$ al punto de máxima elongación (x = A):

$$F = -k \cdot A$$

En el punto de máxima elongación, la aceleración del sistema es máxima, si se aplica la 2ª ley de la dinámica:

$$F = m \cdot a_{máx}$$

Igualando ambas expresiones:

$$-k \cdot A = m \cdot a_{máx}$$

La aceleración se puede obtener a partir de la ecuación del movimiento armónico simple:

$$y(t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_o)$$

$$v(t) = \frac{d\,y(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_o)\right) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_o)$$

$$a(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\omega \cos(\omega t + \varphi_o)\right) = -A\omega^2\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_o)$$

La aceleración será máxima cuando la seno valga 1, quedando:

$$a_{máx} = -A\omega^2$$

Sustituyendo en la expresión $-k \cdot A = m \cdot a_{máx}$ y simplificando se obtiene una relación entre la constante de elasticidad y la velocidad angular, la cual se puede expresar en función del periodo ó la frecuencia

$$-k \cdot A = -A\omega^2 m \ : \ k = \omega^2 m \ : \ \omega = \frac{2\pi}{T} \ : \ k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m$$

$$k = \left(\frac{2\pi}{0{,}25}\right)^2 \cdot 200 \times 10^{-3} = 12{,}8\pi^2 \left(N/m\right)$$

b) En el punto de máxima elongación la energía total del sistema será igual a la energía potencial elástica ya que en punto la velocidad es nula.

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

La energía potencial es máxima en el punto de máxima elongación (x = A) y velocidad nula.

$$E_p(\text{máx}) = E_T = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \ : \ 8 = \frac{1}{2} 12{,}8\pi^2 \cdot A^2 \ : \ A = \sqrt{\frac{8 \cdot 2}{12{,}8\pi^2}} = 0{,}356 \text{ m}$$

Septiembre 2009. Cuestión 2.- Una partícula realiza un movimiento armónico simple de 10 cm de amplitud y tarda 2 s en efectuar una oscilación completa. Si en el instante t = 0 su velocidad es nula y la elongación positiva, determine:

- **a)** La expresión matemática que representa la elongación en función del tiempo.
- **b)** La velocidad y la aceleración de oscilación en el instante t = 0,25 s.

Solución.

a. La posición de un cuerpo que describe un M.A.S. viene dada por una ecuación de tipo senoidal:

$$y(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \varphi) : \left\{ \begin{array}{c} A = 10 \text{ cm} = 0{,}1 \text{ m} \\ T = 2\text{ s} : \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s} \end{array} \right\} : y(t) = 0{,}1 \cdot \text{sen}\,(\pi \cdot t + \varphi)$$

Para calcular el desfase (φ) se tiene en cuenta que para t = 0, la velocidad es nula.

$$v(t) = \frac{d\,y(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0{,}1 \cdot \text{sen}\,(\pi \cdot t + \varphi)\right] = 0{,}1\pi \cdot \cos(\pi \cdot t + \varphi)$$

$$v(t = 0) = 0{,}1\pi \cdot \cos(\pi \cdot 0 + \varphi) = 0 \ : \ 0{,}1\pi \cos\varphi = 0 \ : \ \cos\varphi = 0 \ : \ \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

Teniendo en cuenta que para t = 0, la elongación (y) es positiva:

$$\varphi = +\frac{\pi}{2}$$

La expresión matemática que expresa la elongación del movimiento es:

$$y(t) = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

b.

$$v(t) = \frac{d\,y(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0{,}1 \cdot \text{sen}\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 0{,}1\pi \cdot \cos\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v(t = 0{,}25) = 0{,}1\pi \cdot \cos\left(\pi \cdot 0{,}25 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1\pi \cdot \cos\frac{3\pi}{4} = -0{,}22 \text{ m/s}$$

$$a(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0{,}1\pi \cdot \cos\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = -0{,}1\pi^2 \cdot \text{sen}\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a(t = 0{,}25) = -0{,}1\pi^2 \cdot \text{sen}\left(\pi \cdot 0{,}25 + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}1\pi^2 \cdot \text{sen}\frac{3\pi}{4} = -0{,}7 \text{ m/s}^2$$

Junio 2009. Problema 1A.- Una partícula de 0,1 kg de masa se mueve en el eje X describiendo un movimiento armónico simple. La partícula tiene velocidad cero en los puntos de coordenadas x = –10 cm y x = 10 cm y en el instante t = 0 se encuentra en el punto de x = 10 cm. Si el periodo de las oscilaciones es de 1,5 s, determine:

a) La fuerza que actúa sobre la partícula en el instante inicial.
b) La energía mecánica de la partícula.
c) La velocidad máxima de la partícula.
d) La expresión matemática de la posición de la partícula en función del tiempo.

Solución.

Las magnitudes posición, velocidad y aceleración de un movimiento armónico simple que describe una partícula sobre el eje OX vienen dadas por las expresiones:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_o)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}\left(A\cos(\omega t + \varphi_o)\right) = -A\omega\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_o)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dx}\left(-A\omega\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_o)\right) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_o) = -\omega^2 x$$

Donde A es la amplitud, ω la velocidad angular y φ_0 la fase inicial.

Para calcular la amplitud se tiene en cuenta que en los puntos donde la velocidad es nula, la elongación es máxima y coincide con el valor de amplitud.

$$v = 0 : x = x_{max} = A = 0{,}1\,\text{m}$$

La velocidad angular se obtiene a partir de periodo (T = 1,5 s)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}5} = \frac{4}{3}\pi\,\text{rad}/\text{s}$$

La fase inicial se calcula teniendo en cuenta que para t = 0 x = 0,1m, sustituyendo en la ecuación general:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_o) : \left\{\begin{array}{c} t = 0 \\ A = 0{,}1\,\text{m} \\ x = 0{,}1\,\text{m} \end{array}\right\} : 0{,}1 = 0{,}1\cos(\omega\cdot 0 + \varphi_o) \ : \ \cos\varphi_o = 1 \ ; \ \varphi_o = 0\,\text{rad}$$

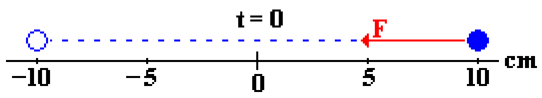
Conocidos todos los parámetros del movimiento, sus ecuaciones son:

$$x = 0{,}1\cos\left(\frac{4}{3}\pi\,t\right)$$

$$v = -A\omega\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_o) = -0{,}1\cdot\frac{4}{3}\pi\,\text{sen}\left(\frac{4}{3}\pi\,t\right) = -\frac{2}{15}\pi\,\text{sen}\left(\frac{4}{3}\pi\,t\right)$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_o) = -\frac{2}{15}\pi\cdot\frac{4}{3}\pi\,\text{sen}\left(\frac{4}{3}\pi\,t\right) = -\frac{8}{45}\pi^2\cos\left(\frac{4}{3}\pi\,t\right)$$

a. $F = m\cdot a$ Para t = 0: $a = -\frac{8}{45}\pi^2\cos\left(\frac{4}{3}\pi\cdot 0\right) = -\frac{8}{45}\pi^2\,\text{m}/\text{s}^2$



$$F = m\cdot a = 0{,}1\,\text{kg}\cdot\left(-\frac{8}{45}\pi^2\,\text{m}/\text{s}^2\right) = -0{,}175\,\text{N}$$

El signo negativo corresponde al sentido de la fuerza

b. En un movimiento armónico simple, hay una transformación continua entre la energía cinética y potencial, pero, en cualquier instante, la suma es constante y es igual a la energía mecánica total. Al valor máximo de energía cinética le corresponde un valor mínimo de energía potencial (nula) y viceversa.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}mv^2_{máx} = \frac{1}{2}kA^2$$

Con los datos de enunciado, se calcula la energía mecánica como la energía potencial máxima.

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

El valor de k se puede obtener si se tiene en cuenta:

$$\begin{cases} F = m \cdot a \\ F = -k \cdot x \end{cases} : m \cdot a = -k \cdot x$$

$$a = -\omega^2 x \;:\; -m \cdot \omega^2 x = -k \cdot x \;:\; k = m \cdot \omega^2$$

Sustituyendo en la energía mecánica:

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} 0{,}1 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 \cdot 0{,}1^2 = 8{,}8 \times 10^{-3}\,\text{J}$$

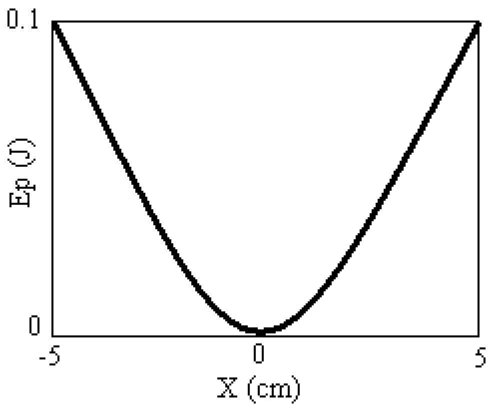
c. $v = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dx}\left(A \cos(\omega t + \varphi_o)\right) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_o)$

$$v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_o)$$

$$v_{máx} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_o) = 1 \;;\; v_{máx} = -A\omega = -0{,}1 \cdot \frac{4}{3}\pi = -0{,}42\,\text{m/s}$$

d. $x = A \cos(\omega t + \varphi_o) \;:\; x = 0{,}1 \cos\left(\frac{4}{3}\pi\, t\right)$

Modelo 2009. Problema 1A.- En la figura se muestra la representación gráfica de la energía potencial (Ep) de un oscilador armónico simple constituido por una masa puntual de valor 200 g unida a un muelle horizontal, en función de su elongación (x).



- **e)** Calcule la constante elástica del muelle
- **f)** Calcule la aceleración máxima del oscilador
- **g)** Determine numéricamente la energía cinética cuando la masa está en la posición x = +2,3 cm.
- **h)** ¿Dónde se encuentra la masa puntual cuando el módulo de su velocidad es igual a la cuarta parte de su velocidad máxima?

Solución.

a. En un movimiento armónico simple, la energía potencial elástica viene dada por la expresión $E_p = \frac{1}{2} k x^2$

Particularizando para x = 5 cm y tomando los valores del gráfico se calcula la constante elástica del muelle.

$$0{,}1 = \frac{1}{2} k \left(5 \times 10^{-2}\right)^2 : k = 80\,\text{N/m}$$

b. Para un movimiento armónico simple, la aceleración viene dada por la expresión:

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_o)$$

Al ser el seno una función que oscila entre –1 y 1; la aceleración máxima vale $A\omega^2$.

Para un muelle, la velocidad angular se puede expresar en función de la constante de elasticidad y de la masa unida al muelle por la expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m}$$

Sustituyendo en la expresión de la aceleración máxima:

$$a_{max} = A\omega^2 = A\frac{K}{m} = 5\times10^{-2}\,m\,\frac{80\,{}^{N}\!/\!{}_{m}}{200\times10^{-3}\,kg} = 20\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}$$

c. Por el principio de conservación de la energía, se cumple:

$$E_m(x = 2{,}3\,cm) = E_m(x = 5\,cm) = E_m(Total) = 0{,}1\,J$$

$$E_m\left(x = 2{,}3\times10^{-2}\,m\right) = E_p\left(x = 2{,}3\times10^{-2}\,m\right) + E_c\left(x = 2{,}3\times10^{-2}\,m\right)$$

Teniendo en cuenta la expresión de la energía potencial elástica $\left(E_p = \frac{1}{2}k\,x^2\right)$ y el valor de la constante de elasticidad del muelle calculada en el apartado a:

$$0{,}1\,J = \frac{1}{2}80\frac{N}{m}\cdot\left(2{,}3\times10^{-2}\,m\right)^2 + E_c\ :\ E_c\left(x = 2{,}3\times10^{-2}\,m\right) = 0{,}08\,J$$

d. Se aplica de nuevo el principio de conservación de la energía, pero en este caso para obtener la energía potencial conocida la energía cinética. Conocida la energía potencial se calcula la elongación (posición).

La energía cinética se puede calcular de dos formas diferentes: Por comparación de energías cinéticas y teniendo en cuenta que la energía cinética es máxima cuando la potencial elástica es nula y por tanto coincide con la energía mecánica total.

$$\left.\begin{array}{r} E_c(\text{máx}) = \frac{1}{2}m\cdot v_{max}^2 \\ E_c(x) = \frac{1}{2}m\cdot v_x^2 \end{array}\right\} : v_x = \frac{v_{max}}{4} : \frac{E_c(\text{máx})}{E_c(x)} = \frac{\frac{1}{2}m\cdot v_{max}^2}{\frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{v_{max}}{4}\right)^2} = 16 \Rightarrow E_c(x) = \frac{E_c(max)}{16} = \frac{E_m(T)}{16}$$

$$E_c(x) = \frac{E_m(T)}{16} = \frac{0{,}1\,J}{16} = 0{,}006\,J$$

Con la definición de energía cinética y calculando la velocidad máxima.

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_o) : v_{max} = A\omega = \left\{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}\right\} = A\sqrt{\frac{K}{m}} = 5\times10^{-2}\sqrt{\frac{80\,{}^{N}\!/\!{}_{m}}{0{,}2\,kg}} = 1\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

Conocida la velocidad máxima, se calcula la energía cinética cuando la elongación es x mediante la relación propuesta por el enunciado:

$$v_x = \frac{v_{max}}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25\,{}^{m}\!/\!{}_{s} \Rightarrow E_c(x) = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}0{,}2\,kg\cdot\left(0{,}25\,{}^{m}\!/\!{}_{s}\right)^2 = 0{,}006\,J$$

Conocida la energía cinética en el punto de elongación x, se calcula la energía potencial elástica teniendo en cuenta que la energía mecánica total es constante.

$$E_m(T) = E_p(x) + E_c(x) : E_p(x) = E_m(T) - E_c(x) = 0{,}1 - 0{,}006 = 0{,}094\,J$$

Conocida la energía potencial elástica se calcula la posición.

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$0{,}094\,J = \frac{1}{2}\cdot80\frac{N}{m}\cdot x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{0{,}094\cdot2}{80}} = 0{,}048\,m = 4{,}8\,cm$$

Septiembre 2008. Cuestión 2. Una partícula que realiza un movimiento armónico simple de 10 cm de amplitud tarda 2 s en efectuar una oscilación completa. Si en el instante t = 0 su velocidad era nula y la elongación positiva, determine:

a) La expresión matemática que representa la elongación en función del tiempo.
b) La velocidad y la aceleración de oscilación en el instante t = 0,25 s.

Solución.

a. La elongación x, velocidad v y aceleración a, vienen dadas por las ecuaciones:

$$x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \ : \ v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) \ : \ a = -A\omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Conocido el periodo (T = 2 s), se calcula la pulsación o velocidad angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ \text{rad}/\text{s}$$

El desfase (φ) se puede calcular con el dato de la velocidad a t = 0.

Si cuando t = 0 la velocidad es nula: $v = A\omega \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \varphi) = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 : \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

- Para $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ en t = 0: $x = A \cdot \operatorname{sen}\left(\omega \cdot 0 - \frac{\pi}{2}\right) = -A < 0$
- Para $\varphi = \frac{\pi}{2}$ en t = 0: $x = A \cdot \operatorname{sen}\left(\omega \cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = A > 0$

Teniendo en cuenta que para t = 0, la elongación (x) es positiva, el desfase deberá ser $\varphi = \pi/2$, la elongación viene expresada por : $x = 0{,}1 \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

b. Las expresiones para la velocidad y la aceleración de la partícula son: $\begin{cases} v = 0{,}1\,\pi \cdot \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \\ a = -0{,}1^2\ \pi \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

t = 0,25 s:

- $v = 0{,}1\,\pi \cdot \cos\left(\pi\, 0{,}25 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1\,\pi \cdot \cos\frac{3\pi}{4} = -0{,}22\ \text{m}/\text{s}$
- $a = -0{,}1^2\ \pi \cdot \operatorname{sen}\left(\pi\, 0{,}25 + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}1\,\pi^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = -0{,}698\ \text{m}/\text{s}^2$

Junio 2008. Cuestión 1. Un cuerpo de masa m está suspendido de un muelle de constante elástica k. Se tira verticalmente del cuerpo desplazando éste una distancia X respecto de su posición de equilibrio, y se le deja oscilar libremente. Si en las mismas condiciones del caso anterior el desplazamiento hubiese sido 2X, deduzca la relación que existe, en ambos casos, entre: **a)** las velocidades máximas del cuerpo; **b)** las energías mecánicas del sistema oscilante.

Solución.

Se trata de un movimiento armónico simple vertical, las ecuaciones que lo rigen son:

$$F = -K \cdot x$$

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = x' = -A\,\omega \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \ ; \quad v_{máx} = -A\,\omega$$

E(mec) = E(c) + E(p), cuando la energía potencial es máxima, la energía cinética es nula

$$E_{Mec} = \frac{1}{2} K \cdot A^2$$

Aplicando el 2º principio de la dinámica a la ley de Hook

$$m\,a = -K\,x$$

Teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada segunda de la posición

$$m\,x'' = -K\,x : \begin{Bmatrix} x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \\ x'' = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} : \quad -m\,A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -K\,A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ ; No depende de la amplitud}$$

Si se aplica a cada caso teniendo en cuenta que lo único que varía es la amplitud y que no hay desfase:

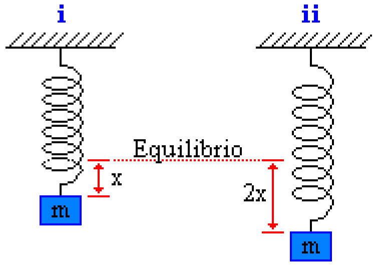
$A_1 = x$

$y_1 = x \cdot \cos(\omega t)$

$v_1 = -x\omega \cdot \mathrm{sen}(\omega t)$

$v(max)_1 = -x\omega$

$E_1 = \frac{1}{2} K \cdot x^2$



$A_2 = 2x$

$y_2 = 2x \cdot \cos(\omega t)$

$v_2 = -2x\omega \cdot \mathrm{sen}(\omega t)$

$v(max)_2 = -2x\omega$

$E_1 = \frac{1}{2} K \cdot (2x)^2$

a. La relación entre las velocidades máximas es la misma que la de las amplitudes

$$\frac{v(max)_1}{v(max)_2} = \frac{-x\,\omega}{-2x\,\omega} = \frac{1}{2} \Rightarrow v(max)_2 = 2v(max)_1$$

b. La relación entre las energías mecánicas es el cuadrado que la de las amplitudes

$$\frac{E(mec)_1}{E(mec)_2} = \frac{\frac{1}{2} K \cdot x^2}{\frac{1}{2} K \cdot (2x)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow E(mec)_2 = 4E(mec)_1$$

Junio 2007. Cuestión 2.- Un objeto de 2,5 kg está unido a un muelle horizontal y realiza un movimiento armónico simple sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de 3,3 Hz. Determine:

a) El periodo del movimiento y la constante elástica del muelle.

b) La velocidad máxima y la aceleración máxima del objeto.

Solución

a) Para resolver esta cuestión necesitamos recordar ciertas fórmulas del movimiento armónico y de los muelles:

$$T = \frac{1}{\nu} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu$$
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad a = \frac{F}{m}$$

De donde fácilmente resulta:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{3{,}3} = 0{,}3\,\mathrm{s}$$
$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 3.3 = 20{,}7\ \mathrm{rad/s}$$
$$k = m \cdot \omega^2 = 2{,}5 \cdot 20{,}7^2 = 1074{,}8\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

b) Para conocer la aceleración máxima calcularemos la fuerza máxima, que se produce en el extremo, y dividiremos por la masa, despreciando la masa del muelle:

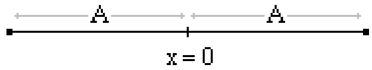
$$a_{máx} = \frac{|F_{máx}|}{m} = \frac{k \cdot A}{m} = \frac{1074{,}8 \cdot 0{,}05}{2{,}5} = 21{,}5\ \mathrm{m/s^2}$$

Para calcular la velocidad máxima utilizaremos el principio de conservación de la energía, ya que la energía potencial en el extremo será igual a la cinética máxima, que se tiene cuando la masa pasa por el punto de equilibrio.

$$E_{cinética}(máx) = E_{potencial}(máx)$$
$$\frac{1}{2} k \cdot A^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_{máx}^2 \ ; \ v_{máx} = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$v_{máx} = 0{,}05 \cdot \sqrt{\frac{1074{,}8}{2{,}5}} = 1{,}04\ \mathrm{m/s}$$

Septiembre 2006. Cuestión 2.- Una partícula que describe un movimiento armónico simple recorre una distancia de 16 cm en cada ciclo de su movimiento y su aceleración máxima es de 48 *m/s*^{2}. Calcule: **a)** la frecuencia y el periodo del movimiento; **b)** la velocidad máxima de la partícula.

Solución.



Un ciclo supone recorrer 4 veces la amplitud (A).

$$4A = 16cm \qquad A = 4cm \qquad a_{max} = 48 \,{}^{m}\!/_{s^2}$$

a) Frecuencia (ν) y período (T). A partir de la ecuación del movimiento armónico simple y derivando sucesivamente se obtienen las expresiones de la velocidad y aceleración de movimiento.

$$x = A \cdot sen(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = v = A\omega \cdot cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dv}{dt} = a = -A\omega^2 \cdot sen(\omega t + \varphi)$$

El valor absoluto de la aceleración máxima será:

$$|a_{máx}| = \omega^2 A$$

Conocida la aceleración máxima y la amplitud se calcula la velocidad angular (ω).

$$\omega^2 = \frac{a_{máx}}{A} = \frac{48 \,{}^{m}\!/_{s^2}}{0'04\,m} = 1200 \quad \Rightarrow \quad \omega = 34'6 \,{}^{rad}\!/_{s}$$

Conocida la velocidad angular se calcula el período y la frecuencia en el orden que uno quiera mediante las tres ecuaciones que la relacionan.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega = 2\pi \cdot \nu \qquad \nu = \frac{1}{T}$$

- Período. $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\,rad}{34'6 \,{}^{rad}\!/_{s}} = 0'18\,s$
- Frecuencia. $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{34'6 \,{}^{rad}\!/_{s}}{2\pi\,rad} = 5'5\,Hz\left(s^{-1}\right)$

b) Velocidad máxima de la partícula. Se puede resolver de dos formas. Según la expresión de la velocidad de un movimiento armónico simple $(v = A\omega \cdot cos(\omega t + \varphi))$, alcanzará su valor máximo cuando la componente trigonométrica valga 1, y en ese caso la velocidad máxima será:

$$v_{máx} = A\omega = 0'04 \cdot 34'6 = 1'38 \,{}^{m}\!/_{s}$$

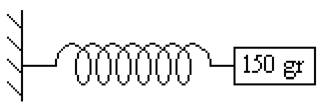
A la misma expresión se puede llegar teniendo en cuenta que la velocidad máxima de la partícula se produce en el origen $x = 0$, donde la energía mecánica es toda cinética:

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \qquad m\omega^2 A^2 = m\,v_{max}^2 \qquad v_{máx} = A\omega$$

Junio 2006. Problema 2B.- Una masa puntual de valor 150 g unida a un muelle horizontal de constante elástica k = 65 N m^{-1} constituye un oscilador armónico simple. Si la amplitud del movimiento es de 5 cm, determine:

a) La expresión de la velocidad de oscilación de la masa en función de la elongación.
b) La energía potencial elástica del sistema cuando la velocidad de oscilación es nula.
c) La energía cinética del sistema cuando la velocidad de oscilación es máxima.
d) La energía cinética y la energía potencial elástica del sistema cuando el módulo de la aceleración de la masa es igual a 13 m s^{-2}.

Solución.



$$m = 150gr$$
$$k = 65 \,{}^{N}\!/_{m}$$
$$A = 5cm$$

a) En un momento cualquiera del movimiento en que la elongación es **x** y la velocidad v, la energía del sistema es:

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Cuando la elongación es máxima y la velocidad es cero la energía será:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Como la energía se conserva:

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - X^2\right)}$$

Dando valores:

$$v = 20{,}8\sqrt{25 - x^2\,(cm)} \quad {}^{cm}\!/\!_{s}$$

b) La energía potencial elástica cuando la velocidad es nula es simplemente:

$$E_p = \frac{1}{2}KA^2 = 0{,}081 \text{ J}$$

c) Cuando la velocidad es máxima la elongación es nula y la energía cinética coincida con la energía total

$$E_c = 0{,}081 \text{ J}$$

d) Las expresiones de la elongación, la velocidad y la aceleración son respectivamente:

$$x(t) = A\,sen(\omega t + \phi_o)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi_o)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 sen(\omega t + \phi_o)$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20{,}8 \text{ rad s}^{-1}$

Si llamamos t_1 al instante en que $|a| = 13 ms^{-2}$

$$a(t_1) = 13 \text{ m s}^{-2} = -21{,}7 sen(\omega t_1 + \phi_o)$$

Operando se despeja sen($\omega t_1 + \phi_o$) y mediante le ecuación fundamental de la trigonometría ($sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$) se despeja el cos($\omega t_1 + \phi_o$).

$$sen(\omega t_1 + \phi_o) = \frac{13}{-21'7} = -0'6$$

$$\cos(\omega t_1 + \phi_0) = \sqrt{1 - sen^2(\omega t_1 + \phi_0)} = \sqrt{1 - (-0'6)^2} = 0{,}8$$

Conocidas las razones trigonométricas se calcula la posición y la velocidad para t_1, y a partir de estas las energías potencial y cinética.

$$\left.\begin{array}{r} x(t) = A\,sen(\omega t + \phi_o) \\ sen(\omega t_1 + \phi_o) = -0'6 \end{array}\right\} : x(t_1) = 5\times10^{-2}\,m\cdot(-0{,}6) = -3\times10^{-2}\,m$$

$$\left.\begin{array}{r} v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi_o) \\ \cos(\omega t_1 + \phi_o) = 0'8 \end{array}\right\} : v(t_1) = 5\times10^{-2}\cdot 20'8\cdot 0'8 = 0'832 \; {}^{m}\!/\!_{s}$$

- Energía potencial $Ep = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot 65\cdot\left(-3\times10^{-2}\right)^2 = 0'029 \text{ J}$
- Energía cinética es $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 0'150\cdot 0'832^2 = 0'052 \text{ J}$

Modelo 2006. Problema 1B.

a) Determine la constante elástica k de un muelle, sabiendo que si se le aplica una fuerza de 0,75 N éste se alarga 2,5 cm respecto a su posición de equilibrio.

Uniendo al muelle anterior un cuerpo de masa 1,5 kg se constituye un sistema elástico que se deja oscilar libremente sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Sabiendo que en t = 0 el cuerpo se encuentra en, la posición de máximo desplazamiento, x = 30 cm, respecto a su posición de equilibrio, determine:

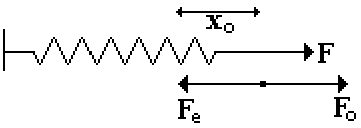
b) La expresión matemática del desplazamiento del cuerpo en función del tiempo.

c) La velocidad y la aceleración máximas del cuerpo.

d) Las energías cinética y potencial cuando el cuerpo se encuentra a 15 cm de la posición de equilibrio.

Solución.

a.

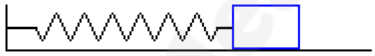


El punto de equilibrio es donde se igualan las fuerzas. La fuerza elástica será entonces

$$F_e = k \cdot x_o$$

$$k_x \cdot 0'025\text{m} = 0'75\text{N} \Rightarrow k_x = 30 \, \text{N}/\text{m}$$

Uniendo al muelle anterior un cuerpo de masa 1,5 kg se constituye un sistema elástico que se deja oscilar libremente sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Sabiendo que en t = 0 el cuerpo se encuentra en, la posición de máximo desplazamiento, x = 30 cm, respecto a su posición de equilibrio, determine:



b. De la masa del objeto y la constante elástica deducimos la frecuencia de oscilación del sistema

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{30}{1'5}} = \sqrt{20} \ s^{-1} = 4'47 \, s^{-1}$$

la amplitud del movimiento es el máximo desplazamiento $\Rightarrow A = 30\text{cm}$

$$x(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega t + \phi) \Rightarrow x(t) = 30 \text{ cm} \cdot \text{sen}\left(4'47\, s^{-1} t + \phi\right)$$

Para calcular el desfase (ϕ) se tiene en cuenta que en $t = 0 : x(0) = 30 \text{ cm}$

$$30 \text{ cm} = 30 \text{ cm} \cdot \text{sen}\,\phi \Rightarrow \text{sen}\,\phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

sustituyendo en la ecuación:

$$x(t) = 30 \text{ cm} \cdot \text{sen}\left(4'47\, s^{-1}\, t + \frac{\pi}{2}\right)$$

c. Por definición, la velocidad es la derivada de la posición con respecto de x.

$$v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}\left[A \cdot \text{sen}\,(\omega\, t + \phi)\right] = A \cdot \omega \ \cos(\omega\, t + \phi)$$

La velocidad máxima se obtiene cuando la expresión trigonométrica vale 1

$$\left.\begin{array}{l} v(t) = A \cdot \omega \ \cos(\omega\, t + \phi) \\ v_{máx} \Leftrightarrow \cos(\omega\, t + \phi) = 1 \end{array}\right\} : v_{máx} = A \cdot \omega$$

Sustituyendo valores

$$v_{max} = 30 \text{ cm} \cdot 4'47\, s^{-1} = 134'1 \, \text{cm}/\text{s} = 1'341 \, \text{m}/\text{s}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo

$$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=\frac{d}{dt}[A\omega\cdot\cos(\omega t+\phi)]=-A\omega^2\mathrm{sen}(\omega t+\phi)$$

Al igual que en el caso de la velocidad, la aceleración máxima se obtiene cuando la expresión trigonométrica vale 1.

$$a_{max}=A\omega^2=30\,\mathrm{cm}\cdot\left(\sqrt{20}\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2=600\,\mathrm{cm}/\mathrm{s}^2=6\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$$

d. Cuando la masa está en el extremo toda la energía es potencial,

$$E=E_{pot}=\frac{1}{2}k\cdot x^2=\frac{1}{2}k\cdot A^2=\frac{1}{2}30\cdot 0'3^2=1'35\,\mathrm{J}$$

y coincide con la energía total el sistema.

Cuando x = 15 cm, la energía potencial es:

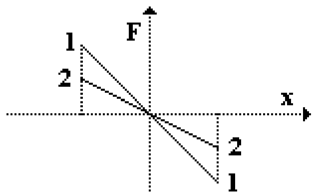
$$E_{pot}=\frac{1}{2}k\cdot x^2=\frac{1}{2}30\cdot 0'15^2=0{,}3375\ \mathrm{J}\Rightarrow E_{pot}=0{,}3375\ \mathrm{J}$$

La energía cinética se calcula como diferencia entre la energía total del sistema y la energía potencial en este punto.

$$E=E_{cin}+E_{pot}\Rightarrow E_{cin}=E-E_{pot}=1{,}35-0{,}3375=1{,}1625\ \mathrm{J}$$

$$E_{cin}=1{,}1625\ \mathrm{J}$$

Septiembre 2005. Cuestión 1. Se tienen dos muelles de constantes elásticas k_1 y k_2 en cuyos extremos se disponen dos masas m_1 y m_2 respectivamente, y tal que $m_1 < m_2$. Al oscilar, las fuerzas que actúan sobre cada una de estas masas en función de la elongación aparecen representadas en la figura. a) ¿Cuál es el muelle de mayor constante elástica? b) ¿Cuál de estas masas tendrá mayor período de oscilación?

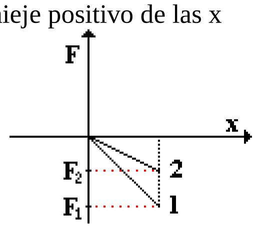


Solución.

a. La expresión de la fuerza elástica ó ley de Hooke es F = –k · x. Si se aplica a cada uno de los muelles:

$$F_1=-k_1\cdot x$$
$$F_2=-k_2\cdot x$$

Si se observa la figura en el semieje positivo de las x



$$F_1<F_2$$

sustituyendo por sus expresiones:

$$-k_1\cdot x<-k_2\cdot x$$

simplificando

$$-k_1<-k_2\quad \text{ordenando}\quad k_1>k_2$$

b. La frecuencia de oscilación de un muelle es:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

y la relación de esta con el periodo es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

igualando ambas expresiones se puede despejar el periodo en función de la masa y de la constante elástica.

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} : \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Aplicando la expresión anterior a ambos muelles y comparando:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_1}{k_1}} \\ T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_2}{k_2}} \end{array}\right\} : \frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_1}{k_1}}}{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{m_2}{k_2}}} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{k_2}{k_1}}$$

Teniendo en cuenta la relación de masas del enunciado y la relación del constantes del apartado anterior:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 < m_2 \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} < 1 \\ k_1 > k_2 \Rightarrow \dfrac{k_2}{k_1} < 1 \end{array}\right\} : \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{k_2}{k_1} < 1 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} < 1$$

ordenando

$$T_1 < T_2$$

Modelo 2005. Problema 1A.- Una partícula de masa 100 g realiza un movimiento armónico simple de amplitud 3 m y cuya aceleración viene dada por la expresión $a = -9\pi^2 x$ en unidades SI. Sabiendo que se ha empezado a contar el tiempo cuando la aceleración adquiere su valor absoluto máximo en los desplazamientos positivos, determine:

- **a)** El periodo y la constante recuperadora del sistema.
- **b)** La expresión matemática del desplazamiento en función del tiempo x = x (t).
- **c)** Los valores absolutos de la velocidad y de la aceleración cuando el desplazamiento es la mitad del máximo.
- **d)** Las energías cinética y potencial en el punto donde tiene velocidad máxima.

Solución.

a. Sabiendo que en un m.a.s:

$$a = -\omega^2 x$$

y por otro lado, según el enunciado:

$$a = -9\pi^2 x$$

comparando ambas expresiones:

$$\omega^2 = 9\pi^2 \qquad \omega = 3\pi \,{}^{rad}\!/_{s}$$

la constante recuperadora del sistema k se relaciona con w:

$$k = m \cdot \omega^2 = 0'1 \cdot 9\pi^2 = 0'9\pi^2$$

Conocida la velocidad angular, el periodo se calcula con:

$$T = \frac{2\pi}{w} \qquad \text{Por tanto}: T = \frac{2\pi}{3\pi} \qquad T = \frac{2}{3}\text{seg}$$

b.

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_o)$$

De esta expresión lo único que falta por determinar es φ_o. La fase inicial la hallamos sabiendo que en $t = 0, \quad x = A$:

$$x(0) = A\text{sen}(\omega\cdot 0 + \varphi_o) = A \qquad \text{sen }\ \varphi_o = 1 \qquad \varphi_o = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la expresión para la ecuación del movimiento es:

$$x(t) = 3\text{sen}\left(3\pi t + \pi/2\right)$$

c. Para calcular la velocidad y la aceleración cuando $x = \frac{A}{2} = \frac{3}{2}\text{m}$, se tiene en cuenta la

$$|a| = \left|-\omega^2\cdot x\right| \qquad a = 9\pi^2\cdot\frac{3}{2} \qquad a = \frac{27}{2}\pi^2\ \text{m}/\text{s}^2$$

Conociendo la relación entre v, a y x, despeja v:

$$v = \omega\cdot\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$v = 3\pi\cdot\sqrt{9 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{27/4} = \frac{\sqrt{27}}{2}\ \text{m}/\text{s}$$

d. El punto donde tiene velocidad máxima es el origen, o punto de elongación cero, ya que tiene que conservarse la energía mecánica total de la partícula, y en el origen esta solo tiene energía cinética, que por tanto es máxima. (como consecuencia, su velocidad también lo es).

$$E_c = \frac{1}{2}m\cdot v_{max}^2 = \frac{1}{2}k\cdot A^2\,(E_{TOTAL})$$

$$E_c = \frac{1}{2}\cdot 0'9\pi^2\cdot 9 = 4'05\pi^2\,\text{J}$$

La energía potencial depende de la elongación X, por tanto es nula en el origen.

$$E_p = \frac{1}{2}k\cdot x^2 \quad (x = 0) \qquad E_p = 0$$

Junio 2004. Cuestión 1.-

Al colgar una masa en el extremo de un muelle en posición vertical, este se desplaza 5 cm;

a) ¿De qué magnitudes del sistema depende la relación entre dicho desplazamiento y la aceleración de la gravedad?

b) Calcule el periodo de oscilación del sistema muelle-masa anterior si se deja oscilar en posición horizontal (sin rozamiento).

Dato: aceleración de la gravedad $g = 9'81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Solución.

a. La relación entre el desplazamiento y la constante del muelle se establece calculando la posición de equilibrio: $K\cdot x = m\cdot g$, en este caso x es la distancia entre la posición de equilibrio sin gravedad y con gravedad.

$$x = \frac{m\cdot g}{k} = 0'05\text{m} \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{5\times 10^{-2}} \rightarrow \frac{m}{k} = \frac{x}{g} = \frac{5\times 10^{-2}\text{m}}{g}$$

expresión el le que se observa que depende de K y de m.

b. En posición horizontal el periodo será:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \left\{\begin{array}{l} k = m\cdot\omega^2 \\ \frac{1}{\omega} = \sqrt{m/k} \end{array}\right\} = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{5\times 10^{-2}}{9'81}} = 0{,}45\text{seg}$$

Modelo 2004. Problema 1B.- Una partícula de 5 g de masa se mueve con un movimiento armónico de 6 cm de amplitud a lo largo del eje X. En el instante inicial (t=0) su elongación es de 3 cm y el sentido del desplazamiento hacia el extremo positivo. Un segundo más tarde su elongación es de 6 cm por primera vez. Determine:

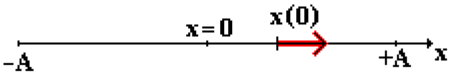
a) La fase inicial y la frecuencia del movimiento.

b) La función matemática que representa la elongación en función del tiempo, x = x(t).

c) Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de la partícula, así como las posiciones donde los alcanzan.

d) La fuerza que actúa sobre la partícula en t = 1 s y su energía mecánica.

Solución.



m=5gr A=6cm

a. La ecuación general de un M.A.S es:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_o)$$

Para calcular la fase inicial, utilizamos las condiciones iniciales del movimiento:

$$x(0) = 3 \times 10^{-2}\,\text{m}$$

sustituyendo en la ecuación general:

$$x(0) = 3 \times 10^{-2} = A \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_o)$$

Teniendo en cuenta que la amplitud(A) vale 6×10^{-2}

$$3 \times 10^{-2} = 6 \times 10^{-2} \cdot \cos \varphi_o$$

$$\cos \varphi_o = \frac{1}{2} \qquad \varphi_o = \pi/3$$

b. Utilizamos la segunda condición y conocido el desfase inicial se puede calcular la velocidad angular:

$$x(1) = 6 \times 10^{-2}\,\text{m} = 6 \times 10^{-2} \cdot \cos(\omega + \pi/3)$$

despejando

$$\cos(\omega + \pi/3) = 1 \qquad (\omega + \pi/3) = 2\pi \qquad \omega = \frac{5\pi}{3}\,\text{rad}/\text{s}$$

Conocida la velocidad angular(ω), el desfase inicial(φ_o) y la amplitud(A) la ecuación que representa la elongación en función del tiempo(x(t)) es:

$$x(t) = 6 \times 10^{-2} \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{3} t + \pi/3\right)$$

c. Derivando la expresión anterior se obtiene la expresión de la velocidad en función del tiempo:

$$V(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = -6 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{5\pi}{3}\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3} t + \pi/3\right)$$

Cuyo valor máximo se produce cuando:

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3} t + \pi/3\right) = 1$$

y por tanto la velocidad máxima es:

$$|V_{MAX}| = \frac{\pi}{10}$$

Esta **velocidad máxima** se alcanza en x = 0 (ya que en este punto, la energía cinética es máxima, y por tanto la velocidad.)

La aceleración de un M.A.S. viene expresada por:

$$a = -\omega^2 x$$

Por lo que, su valor máximo se alcanza cuando x llega a un valor máximo, $a = \pm A$, **en los extremos del oscilador**.

$$|a|_{MAX} = \left(\frac{5\pi}{3}\right)^2 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \qquad |a| = 1'65\,\text{m}/\text{s}^2$$

d. La fuerza que actúa sobre la partícula en t = 1, cuando x = A, sigue la ley de Hooke:

$$F = -kx \qquad F = -k \cdot A$$

Donde $k = m\omega^2$ es la constante de oscilación, y el signo (–) indica que la fuerza siempre actúa en sentido contrario a la elongación.

Calculando k:

$$k = 0'005\,kg \cdot \left(\frac{5\pi}{3}\right)^2 \qquad k = 0'14\ {}^{N}\!/\!{}_{m} \qquad y \qquad |F| = 8'22 \cdot 10^{-4}\ N$$

Puesto que el M.A.S. se produce debido a una fuerza conservativa (solo depende de la posición), la energía total o mecánica del sistema se mantiene constante en todo el movimiento y su valor es:

$$E_m = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

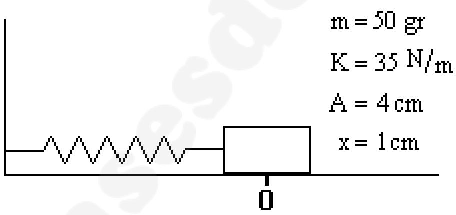
Sustituyendo valores:

$$E_m = 2'523 \cdot 10^{-4}\ J$$

Junio 2003. Problema 1B. Un bloque de 50 g, conectado a un muelle de constante elástica 35 N/m, oscila en una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 4 cm. Cuando el bloque se encuentra a 1 cm de posición de equilibrio, calcule:

a) La fuerza ejercida sobre el bloque.
b) La aceleración del bloque.
c) La energía potencial elástica del sistema.
d) La velocidad del bloque.

Solución.



a. F = –K · x = –35 N/m · 0’01 m = –0’35 N. El signo indica que la fuerza va hacia la posición de equilibrio.

b. Aplicando el segundo principio de la dinámica:

$$F = m \cdot a \quad : \quad a = \frac{F}{m} = \frac{-0'35\ N}{50 \times 10^{-3}\ Kg} = -7\ m/s^2$$

El signo al igual que antes indica el sentido del vector

c. $$E_p = \frac{1}{2} K \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot (0'01)^2 = 1'75 \times 10^{-3}\ J$$

d. La velocidad se calcula a partir de la energía cinética.

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \left(A^2 - x^2\right)$$

despejando v de la segunda igualdad

$$v = \sqrt{\frac{K \cdot \left(A^2 - x^2\right)}{m}} = \sqrt{\frac{35 \cdot \left(0'04^2 - 0'01^2\right)}{50 \times 10^{-3}}} = 1'02\ m/s$$

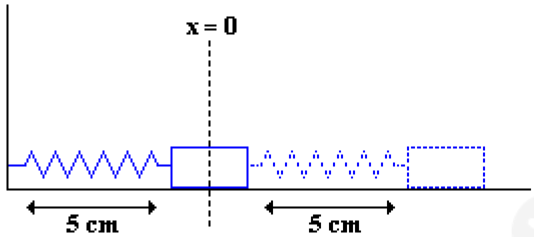
Junio 2002. Problema 1B. Una masa de 2 kg está unida a un muelle horizontal cuya constante recuperadora es k = 10 N/m. El muelle se comprime 5 cm desde la posición de equilibrio (x = 0) y se deja en libertad. Determine:

- **a)** La expresión de la posición y la masa en función del tiempo, x = x(t).
- **b)** Los modulo de la velocidad y de la aceleración de la masa en un punto situado a 2 cm de la posición de equilibrio.
- **c)** La fuerza recuperadora cuando la masa se encuentra en los extremos de la trayectoria.
- **d)** La energía mecánica del sistema oscilante.

Nota: Considere que los desplazamientos respecto a la posición del equilibrio son positivos cuando el muelle está estirado.

Solución.

a. x = x (t)



La amplitud del movimiento es A = 0’05 m. La ecuación general del M.A.S que describe la masa es:

$$x(t) = A\cos(\omega\cdot t + \varphi_o)$$

de esta expresión, queda por hallar la velocidad angular(ω) y la fase inicial φ_o :

Conocidas la masa(m) y la constante(k) del muelle:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{10}{2}} \qquad \omega = \sqrt{5}\,\text{rad/s}$$

sustituyendo en la expresión del M.A.S.

$$x(t) = 0'05\cdot\cos\left(\sqrt{5}\cdot t + \varphi_o\right)$$

Aplicando la ecuación al momento inicial, y teniendo en cuenta que x (t = 0) = –A:

$$x(0) = -0'05 = 0'05\cos\varphi_o \qquad \cos\varphi_o = -1 \qquad \varphi_o = \pi\,\text{rad}$$

Por tanto, la expresión para el movimiento de la partícula queda de la siguiente forma:

$$x(t) = 0'05\cos\left(\sqrt{5}t + \pi\right)$$

b. Si $|x| = 2\text{cm.}$, los módulos de la velocidad y la aceleración se calcula teniendo en cuenta:

$$|a| = \omega^2\cdot x \qquad |a| = \left(\sqrt{5}\right)^2\cdot 0'02 = 0'1\left({}^{m}\!/_{s^2}\right)$$

Teniendo en cuenta que

$$|v| = \omega\cdot\sqrt{A^2 - x^2} \qquad V = \sqrt{5}\cdot\sqrt{(0'05)^2 - (0'02)^2} \qquad |v| = 0'1025\left({}^{m}\!/_{s}\right)$$

c. La fuerza recuperadora, en módulo, es:

$$F = -kx \quad \text{(se opone siempre a la elongación del movil)}$$

para los extremos de oscilación x = ± A

$$F = -k\cdot A : \begin{cases} F = -10\cdot 0'05 & F = -0'5N \quad \text{para} \quad x = A \\ F = -10\cdot(-0'05) & F = 0'5N \quad \text{para} \quad x = -A \end{cases}$$

d. La energía mecánica del sistema oscilante viene expresada por:

$$E_m = \frac{1}{2}k\cdot A^2$$

sustituyendo por los datos del problema

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (0'05)^2 \qquad E_m = 0'0125\,J$$

Modelo 2002. Problema 1B.- Un cuerpo de 200 g unido a un resorte horizontal oscila, sin rozamiento, sobre una mesa, a lo largo del eje de las X, con una frecuencia angular ω = 8,0 rad/s. En el instante t = 0, el alargamiento del resorte es de 4 cm respecto de la posición de equilibrio y el cuerpo lleva en ese instante una velocidad de -20 cm/s. Determine:

a) La amplitud y la fase inicial del movimiento armónico simple realizado por el cuerpo.
b) La constante elástica del resorte y la energía mecánica del sistema.

Solución.

a. La posición y la velocidad de un movimiento armónico simple vienen dadas por las expresiones:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega\,t + \varphi_o)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega\,t + \varphi_o)$$

Para t = 0: $\begin{cases} 4\times10^{-2} = A\,\text{sen}\,(\omega\cdot 0 + \varphi_o) \\ -20\times10^{-2} = A\omega\cos(\omega\cdot 0 + \varphi_o) \end{cases} : \begin{cases} A\,\text{sen}\,\varphi_o = 4\times10^{-2} \\ A\omega\cos\varphi_o = -20\times10^{-2} \end{cases}$

Comparando ambas expresiones se obtiene la fase inicial

$$\frac{1}{\omega}\text{tg}\,\varphi_o = \frac{4\times10^{-2}}{-20\times10^{-2}} \ : \ \text{tg}\,\varphi_o = -\frac{\omega}{5} = -\frac{8}{5} : \begin{cases} \varphi_o = 2{,}1\,\text{rad} \\ \varphi_o = 5{,}3\,\text{rad} \end{cases}$$

Para discernir cual de los desfases corresponde al movimiento propuesto se estudian los signos de la posición y de la velocidad inicial para cada desfase.

$$\varphi_o = 2{,}1\,\text{rad} : \begin{cases} x = A\,\text{sen}\,2{,}1 > 0 \\ v = A\omega\cos 2{,}1 < 0 \end{cases} \ ; \ \varphi_o = 5{,}3\,\text{rad} : \begin{cases} x = A\,\text{sen}\,5{,}3 < 0 \\ v = A\omega\cos 5{,}30 \end{cases}$$

El desfase inicial es $\varphi_o = 2{,}1\,\text{rad}$

Conocido el desfase inicial se calcula la amplitud.

$$A\,\text{sen}\,\varphi_o = 4\times10^{-2} \ ; \ A = \frac{4\times10^{-2}}{\text{sen}\,\varphi_o} = \frac{4\times10^{-2}}{\text{sen}\,2{,}1} = 0{,}046\,\text{m}$$

b. La constante elástica del muelle se saca combinando la 2ª ley de Newton y la ley de Hooke.

$$\left.\begin{matrix} F = ma = -m\omega^2 x \\ F = -Kx \end{matrix}\right\} : K = m\,\omega^2 = 0{,}2\cdot 8^2 = 12{,}8\,\text{N m}^{-1}$$

$$E_m = \frac{1}{2}K\cdot A^2 = \frac{1}{2}\cdot 12{,}8\cdot 0{,}046^2 = 0{,}0135\,J$$

Septiembre 2001. Cuestión 2.- Una partícula efectúa un movimiento armónico simple cuyo período es igual a 1 s. Sabiendo que en el instante t = 0 su elongación es 0’70 cm y su velocidad 4,39 cm/s, calcule:

a. La amplitud y la fase inicial
b. La máxima aceleración de la partícula.

Solución.

a. $T = 1s \Rightarrow \ \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\,\text{rad s}^{-1}$

La posición de una partícula que realiza un movimiento armónico simple viene descrita por la expresión:

$$x(t) = A\,\text{sen}\,(\omega\,t + \varphi_o) \quad \Rightarrow \quad x(0) = A\,\text{sen}\,(\omega\cdot 0 + \varphi_o) = A\,\text{sen}\,\varphi_o$$

La velocidad de un M.A.S es la derivada de la posición respecto del tiempo:

$$v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = A = \frac{d}{dt}[\text{sen}\,(\omega\,t + \varphi_o)] = A\omega\cos(\omega\,t + \varphi_o) \ \Rightarrow \ v(0) = A\omega\cos(\omega\cdot 0 + \varphi_o) = A\omega\cos\varphi_o$$

Dividiendo la posición y la velocidad, se despeja el desfase inicial.

$$\frac{x(0)}{v(0)}=\frac{A\ \text{sen}\ \varphi_o}{A\omega\cos\varphi_o}=\frac{1}{\omega}\text{tg}\ \varphi_o \Rightarrow \varphi_o=\text{arctg}\frac{\omega\cdot x(0)}{v(0)}=\text{arctg}\frac{2\pi\cdot 0{,}70\times10^{-2}}{4{,}39\times10^{-2}}\approx \text{arctg}\,1=\frac{\pi}{4}\text{rad}$$

Conocido el desfase inicial se calcula la amplitud.

$$x(0)=A\ \text{sen}\ \varphi_o \ \Rightarrow\ A=\frac{x(0)}{\text{sen}\ \varphi_o}=\frac{0{,}70\times10^{-2}}{\text{sen}\frac{\pi}{4}}=9{,}9\times10^{-3}\text{m}$$

b. $$a(t)=\frac{d\,v(t)}{dt}=\frac{d}{dt}[A\omega\cos(\omega t+\varphi_o)]=-A\omega^2\text{sen}(\omega t+\varphi_o)$$

El valor máximo de la aceleración será cuando la parte trigonométrica de la expresión valga ±1.

$$|a_{máx}|=A\omega^2=9{,}9\times10^{-3}\cdot(2\pi)^2)=0{,}39\ \text{m s}^{-2}$$

Junio 2001. Cuestión 2. Un muelle cuya constante de elasticidad es k está unido a una masa puntual de valor m. Separando la masa de la posición de equilibrio el sistema comienza a oscilar. Determine:

a) El valor del período de las oscilaciones T y su frecuencia angular ω.
b) Las expresiones de las energías cinética, potencial y total en función de la amplitud y de la elongación del movimiento del sistema oscilante.

Solución.

a. La masa oscila realizando un M. A. S. De ecuación:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_o)$$

La frecuencia del movimiento viene dada por:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

La relación entre ω y T es:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

por tanto:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\qquad T=\frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}\qquad T=\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot 2\pi\ \text{seg}$$

b. La Energía cinética viene expresada por $E_c=\frac{1}{2}mv^2$

Si la posición de la masa viene expresada por

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_o)$$

derivando se obtiene la expresión de la velocidad de la partícula

$$v(t)\frac{d\,x(t)}{dx}=-A\omega\text{sen}(\omega t+\varphi_o)$$

con estas expresiones se plantea el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{-1-} & v(t)=-A\omega\text{sen}(\omega t+\varphi_o)\\ \text{-2-} & x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_o)\end{array}\right\}$$

Si operamos con las ecuaciones (1) y (2) de la posición y la velocidad:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{v^2}{\omega^2}=A^2\text{sen}^2(\omega t+\varphi_o)\\ x^2=A^2\cos^2(\omega t+\varphi_o)\end{array}\right\}$$

sumando estas ecuaciones y sacando factor común en el segundo miembro de A^2

$$\frac{v^2}{\omega^2}+x^2=A^2$$

$$\frac{v^2}{\omega^2} = A^2 - x^2 \qquad v^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

por tanto, la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2} m\omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

La energía Potencial viene expresada por:

$$Ep = \frac{1}{2} kx^2$$

Energía total es la suma de ambas: $E_T = E_c + E_p$

$$E_T = \frac{1}{2} m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

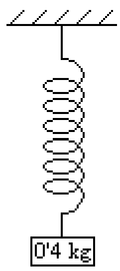
$$E_T = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \qquad E_T = \frac{1}{2} kA^2$$

Septiembre 2000. Problema 1B.- Un oscilador armónico constituido por un muelle de masa despreciable, y una masa en el extremo de valor 40 g, tiene un periodo de oscilación de 2 s.

a) ¿Cuál debe ser la masa de un segundo oscilador, construido con un muelle idéntico al primero, para que la frecuencia de oscilación se duplique?

b) Si la amplitud de las oscilaciones en ambos osciladores es 10 cm, ¿cuánto vale, en cada caso, la máxima energía potencial del oscilador y la máxima velocidad alcanzada por su masa?

Solución.



a. Si el periodo es $T = 2$ s, la frecuencia es $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0'5\,\text{Hz}$ y la velocidad angular es $\omega = 2\pi \cdot \nu$, sustituyendo, $\omega = \pi \,{}^{rad}\!/\!_{s}$

Con estos datos se puede hallar la constante del muelle:

$$k = m \cdot \omega^2 = 0'4\,kg \cdot \left(\pi \,{}^{rad}\!/\!_{s}\right)^2 = 0'4\pi^2\ {}^{N}\!/\!_{m}$$

La masa del segundo oscilador m' debe duplicar la frecuencia:

$$\nu' = 2\nu \qquad \nu' = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\text{Hz}$$

al duplicar la frecuencia, también se duplica la velocidad angular

$$\omega = 2\pi \,{}^{rad}\!/\!_{s}$$

Si se despeja la masa en la ecuación de la constante(k es una característica del muelle, y por tanto constante)

$$k = m\cdot\omega^2 \qquad m = \frac{k}{\omega^2} \qquad m = \frac{0'4\pi^2}{(2\pi)^2} \qquad m = 0'1\text{kg}$$

b. Si la amplitud de los dos osciladores es la misma, su energía potencial máxima también lo es, ya que:

$$E_{p_{máx}} = E_{mec} = \frac{1}{2} k\cdot A^2$$

y su valor por tanto es:

$$E_{p_{máx}} = \frac{1}{2} 0'4\pi^2 \cdot (0'1)^2 = 0'0197\,J$$

La máxima velocidad alcanzada por la masa, dependerá del máximo valor alcanzado por la energía mecánica

$$\frac{1}{2} k \cdot A^2 = E_{p_{máx}} = E_{mec_{máx}} = E_{c_{máx}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{máx}^2$$

puesto que la $E_{c_{máx}}$, es igual a la energía mecánica máxima

$$0'0197 = \frac{1}{2} m \cdot v_{máx}^2$$

para el primer oscilador: $m = 40gr$

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2E_{c_{máx}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0'0197}{0'040}} = 0'993 \, m/s$$

para el segundo: $m = 10gr$

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2E_{c_{máx}}}{m'}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0'0197}{0'010}} = 1'987 \, m/s$$

En un columpio de 2 metros de longitud se cuelga una masa de 2 kg. Se desplaza hasta que la cuerda forma un ángulo de 10º con la vertical y se suelta para que empiece a oscilar. Calcular:

a) Periodo de oscilación
b) Velocidad y aceleración máxima
c) Energía mecánica
d) Ecuación del movimiento

Solución.

a. Se columpio se puede considerar un péndulo simple, y el movimiento que describe un movimiento armónico simple ya que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta(\text{radianes})$.

$$\operatorname{sen}10^{o} = 0{,}1736 \approx \frac{10^{o} \cdot \pi}{180} = 0{,}1745$$

En un péndulo simple que describe un m.a.s., se cumple:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T}} \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{9{,}8}} \approx 2{,}84 \, s$$

b. La máxima velocidad del columpio se puede hacer de dos formas diferentes:

Por energías: Teniendo en cuenta que la velocidad será máxima en el punto de equilibrio, la energía mecánica en ese punto será únicamente cinética. Igualando la energía potencial máxima con la energía cinética máxima se despeja la velocidad máxima.

$$E_p(máx) = E_c(máx) \qquad mgh_{max} = \frac{1}{2} m v_{máx}^2 \qquad v_{máx} = \sqrt{2gh_{max}}$$

La altura máxima se puede obtener por trigonometria.

$$v_{máx} = \sqrt{2g(L - L \cdot \cos\theta)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot (2 - 2 \cdot \cos 10^{o})} = 0{,}77 \, m/s$$

Por m.a.s. $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_o)$ $\quad v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_o)$ $\quad v_{máx} = A\omega$

La amplitud se calcula por trigonometria $(A = L \cdot \operatorname{sen}\theta = 2 \cdot \operatorname{sen} 10^{o} = 0{,}35 \, m)$

$$v_{máx} = A\omega = A \cdot \frac{2\pi}{T} = 0{,}35 \cdot \frac{2\pi}{2{,}84} \approx 0{,}77 \, m/s$$

$$a = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_o) \qquad a_{máx} = -A\omega^2 \qquad |a_{máx}| = A\omega^2 = 0{,}35 \cdot \left(\frac{2\pi}{2{,}84}\right)^2 \approx 1{,}71 m/s^2$$

c. $E_{mecánica} = E_c + E_p = E_c(máx) = E_p(máx)$

$$E_{mecánica} = E_c(máx) = \frac{1}{2} m v_{máx}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}77^2 = 0{,}59 \, J$$

O también:

$$E_{mecánica} = E_p(máx) = mgh_{máx} = mg \cdot (l - l \cdot \cos 10^{o}) = 2 \cdot 9{,}8 \cdot (2 - 2 \cdot \cos 10^{o}) = 0{,}59 \, J$$

d. Movimiento armónico simple:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega\,t + \varphi_o) = A \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\,t + \varphi_o\right) = 0{,}35 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{2{,}84}\,t + \varphi_o\right)$$

El desfase inicial se calcula teniendo en cuenta que el columpio se suelta desde la posición más elevada, y por tanto, $x(0) = A$

$$x(0) = A = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot 0 + \varphi_o) \qquad \text{sen}\,\varphi_o = 1 \qquad \varphi_o = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$$

$$x(t) = 0{,}35 \cdot \text{sen}\left(2{,}21\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$