I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	EXAMEN 3ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II	2º BACH. A CURSO 2013-2014	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

Alumno: SOLUCIONES

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4)

Nota lenguaje matemático (0 a 4)

Nota limpieza y orden (0 a 4)

1. *(Jun 2004)* Resolver la ecuación matricial C(A+X)B=$\mathbb{1}$, donde *(2,5 ptos.)*

$$A=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$C(A+X)B=\mathbb{1}$$

$$C^{-1}C(A+X)B=C^{-1}$$

$$(A+X)\cdot B=C^{-1}$$

$$(A+X)B\cdot B^{-1}=C^{-1}\cdot B^{-1}$$

$$A+X=C^{-1}\cdot B^{-1}$$

$$\boxed{X=(B\cdot C)^{-1}-A} \quad (*)$$

0,5

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=D\ ;\quad |D|=2-1=1\neq 0\Rightarrow \exists D^{-1}$$

0,5

$$\left.\begin{matrix}D_{11}=1 & D_{12}=-1\\ D_{21}=-1 & D_{22}=2\end{matrix}\right\}\ Adj(D)=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\rightarrow {}^tAdj(D)=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\rightarrow D^{-1}=\frac{1}{\underbrace{|D|}_{1}}\cdot {}^tAdj(D)=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

0,5

Sustituimos en (*):

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-5\\-2&0\end{pmatrix}}$$

1

2,5

2. *(Jun 2000)* Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema según los valores del parámetro **a**, y resolverlo cuando sea posible: *(2,5 ptos.)*

$$\left.\begin{array}{l} x-y=5 \\ y+z=a \\ x-2z=3 \\ 2x-3z=a \end{array}\right\}$$

I) Discusión:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{M}\left|\begin{matrix} 5 \\ a \\ 3 \\ a \end{matrix}\right. = M^*$$

¿rg M?

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\,M \geq 2$$

$$|F_1F_2F_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2-1 \neq 0 \Rightarrow rg\,M = 3 \ \forall a \quad 0{,}25$$

¿rg M*?

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} \underset{F_1+F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a+5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = -2a+6-3(a+5)+4(a+5)+9-a$$

$$= -2a+6-3a-15+4a+20+9-a$$

$$= -2a+20 = 0 \Rightarrow a=10 \quad 0{,}5$$

F_1 la que cambia; F_2 no cambia

desarrollamos por C_2

Soluc:

I) $a=10 \Rightarrow rg\,M=3=rg\,M^*=$ nº incógnitas $\xRightarrow{\text{TM. ROUCHÉ-FROBENIUS}}$ sist. compat. dtdo. (soluc. única)

II) $a\neq 10 \Rightarrow rg\,M=3\neq rg\,M^*=4 \Longrightarrow$ sist. incompatible $\quad 0{,}5$

II) Resolución: A la vista de la discusión, sólo se puede resolver si $a=10$, en cuyo caso es compatible dtdo., es decir, tipo Cramer. Según acabamos de ver al estudiar rg M, $|F_1,F_2,F_3|\neq 0 \Rightarrow$ cogemos F_1, F_2 y F_3, y prescindimos de F_4: $\quad 0{,}25$

$$\left(\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 5 \\ 10 \\ 3 \end{matrix}\right.\right) \quad 0{,}25 \ ; \quad |M| \overset{\text{visto antes}}{=} -3$$

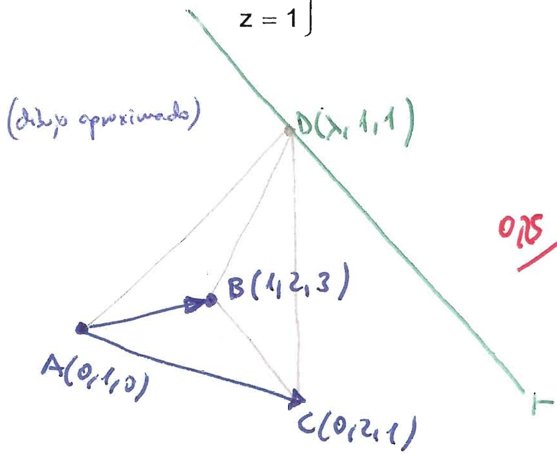
$$\boxed{x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 10 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-10-3-20}{-3} = \frac{-33}{-3} = 11} \quad 0{,}25$$

$$\boxed{y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-20+5-3}{-3} = \frac{-18}{-3} = 6} \quad 0{,}25$$

$$\boxed{z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{3-10-5}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4} \quad 0{,}25$$

$\boxed{1{,}25+1{,}25}$

3. Un tetraedro tiene por vértices A(0,1,0), B(1,2,3), C(0,2,1) y el cuarto vértice está situado en determinado punto D de la recta $\left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1 \\ z=1 \end{array}\right\}$ de forma que su volumen es $\frac{5}{2}$ u^3. Hallar dicho punto. *(2,5 ptos.)*



El tetraedro queda determinado por los siguientes tres vectores:

0,25

$\vec{AB}=(1,1,3)$

$\vec{AC}=(0,1,1)$

$\vec{AD}=(\lambda,0,1)$

0,25   0,25   enunciado

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{array}{ccc}1&1&3\\0&1&1\\\lambda&0&1\end{array}\right\|=\frac{1}{6}\left|1+\lambda-3\lambda\right|=\frac{1}{6}\left|1-2\lambda\right|=\frac{5}{2}$$

$\Rightarrow |1-2\lambda|=15$ (0,25)

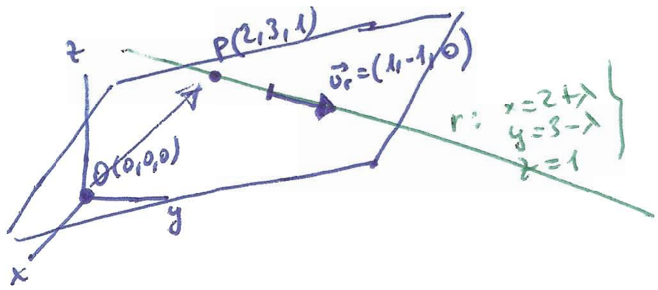
- $1-2\lambda=15;\ -14=2\lambda;\ \lambda=-7 \rightarrow \boxed{D_1(-7,1,1)}$ (0,25 / 0,25)
- $1-2\lambda=-15;\ 16=2\lambda;\ \lambda=8 \rightarrow \boxed{D_2(8,1,1)}$ (0,25 / 0,25)

0,5

2,5

4. Hallar la ecuación general del plano que pasa por el origen y contiene a la recta $\left.\begin{array}{l} x = 2+\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = 1 \end{array}\right\}$ *(2,5 ptos.)*

(dibujo aproximado)



Como puede verse en el dibujo, el plano pedido se puede obtener mediante un punto de él (tenemos dos, el origen O y el punto P de la recta), y dos vectores direccionales; uno de ellos es el de la recta, $\vec{v}_r$, y el otro $\vec{OP}$:

0,5

$$\left.\begin{array}{l} O(0,0,0) \\ \vec{u}_r = (1,-1,0) \\ \vec{OP} = (2,3,1) \end{array}\right\} \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; -x - y + 5z = 0 \; ; \; \boxed{x + y - 5z = 0}$$

1,5

0,5

desarrollo por Laplace por F_1

2,5