

4 | Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a)
$$\frac{\frac{2+x}{2-x} + \frac{2-x}{2+x}}{1 - \frac{2-x}{2+x}} = 5$$

b)
$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{3 + a^2}{1 + 3a^2}$$

2. Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.

- a) Demuestra que la suma de sus dos raíces es igual a $-\frac{b}{a}$
- b) Demuestra que el producto de sus dos raíces es igual a $\frac{c}{a}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales:

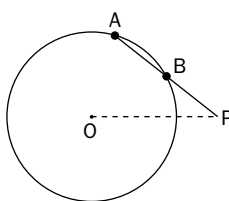
a)
$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x - \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{2}$$

b)
$$\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{2rx - x^2} = r$$

4. Resuelve la siguiente ecuación exponencial: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x-2} = 352$

5. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $5 \log x - \log 288 = 3 \log \frac{x}{2}$

6. La circunferencia de la figura tiene 16 cm de radio y el punto P está situado a 24 cm del centro O. La secante PA corta a la circunferencia de tal forma que las distancias PB y BA coinciden. Calcula la longitud del segmento de extremos P y A.



7. Dos grifos juntos llenan una bañera en 12 minutos. Calcula el tiempo que tardaría en llenar la bañera cada uno de los grifos por separado si se sabe que uno de ellos emplearía 10 minutos menos que el otro.

8. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 5x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$$

9. Comprueba que las expresiones $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$, siendo u y v cualquier pareja de números enteros, forman una solución de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. ¿Cómo será el triángulo formado por segmentos que midan estos números? A cualquier terna de números enteros que verifican esta ecuación se la denomina terna de números pitagóricos.

SOLUCIONES

1. a)
$$\frac{2x^2 + 8}{(2-x)(2+x)} = 5 \Rightarrow \frac{2x^2 + 8}{2x(2-x)} = 5 \Rightarrow$$

$$\frac{2x}{2+x}$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 20x + 8 = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{2}{3}$$

b)
$$x^2 + 3a^2x^2 + x + 3a^2x + 1 + 3a^2 =$$

$$= 3x^2 + a^2x^2 - 3x - a^2x + 3 + a^2$$

$$2(a^2 - 1)x^2 + 4(a^2 + 1)x + 2(a^2 - 1) = 0$$

$$(a^2 - 1)x^2 + 2(a^2 + 1)x + (a^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-a}{a+1}, x = \frac{a+1}{1-a}$$

2. a)
$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

b)
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

3. a)
$$2x + 2\sqrt{x^2 - 4} = x^2 - x\sqrt{x^2 - 4}$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 2x}{x + 2} \Rightarrow x^2 - 4 = \frac{x^4 + 4x^2 - 4x^3}{x^2 + 4x + 4}$$

$$2x^3 - x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)(2x^2 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 2x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ no tiene solución real} \end{cases}$$

b)
$$\sqrt{r^2 - x^2} = r - \sqrt{2rx - x^2}$$

$$r^2 - x^2 = r^2 + 2rx - x^2 - 2r\sqrt{2rx - x^2}$$

$$\sqrt{2rx - x^2} = x \Rightarrow 2rx - x^2 = x^2$$

$$x^2 - rx = 0 \Rightarrow x(x - r) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = r \end{cases}$$

4.
$$3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x + 27 \cdot 3^x + \frac{1}{9} \cdot 3^x = 352 \Rightarrow$$

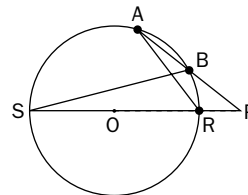
$$\Rightarrow \frac{352}{9} \cdot 3^x = 352 \Rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

5.
$$\log \frac{x^5}{288} = \log \frac{x^3}{8} \Rightarrow \frac{x^5}{288} = \frac{x^3}{8} \Rightarrow x^5 - 36x^3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 6, x = -6$$

$x = 0$ y $x = -6$ no son solución del problema.

6.



Los triángulos PAR y PSB son semejantes, ya que tienen un ángulo común P y los ángulos en A y en S son iguales, por abarcar el mismo arco en la circunferencia.

Escribimos una ecuación con la incógnita PB.

$$\frac{PB}{PS} = \frac{PR}{PA} \Rightarrow PA \cdot PB = PR \cdot PS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot PB^2 = (24 - 16) \cdot (24 + 16) = 320 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PB = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ cm}$$

$$PA = 2 \cdot PB = 8\sqrt{10} \text{ cm}$$

7. Si se supone que el primer grifo tarda x minutos en llenar la bañera y que el segundo tarda x - 10:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 10} = \frac{1}{12} \Rightarrow x^2 - 34x + 120 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = 4 \text{ solución sin sentido} \end{cases}$$

El primer grifo tardaría 30 minutos y el segundo tardaría 20 minutos.

8. Transformamos el sistema en un sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ -8y + 10z = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ 0z = -12 \end{cases}$$

La última ecuación no tiene sentido y, por tanto, el sistema no tiene solución.

9.
$$\begin{cases} (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = u^4 + v^4 + 2u^2v^2 \\ (u^2 + v^2)^2 = u^4 + v^4 + 2u^2v^2 \end{cases}$$

El triángulo es rectángulo.