24 Distribuciones continuas. Distribución normal

1. El beneficio en la venta de artículos textiles, en tanto por uno, es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{1 + x^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcula el valor de k y el beneficio medio esperado.

2. La distribución de los ingresos de los individuos de cierta población, en miles de euros, es una variable aleatoria continua X con función de densidad: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\,000}(20x - x^2) & \text{si } 0 < x \leqslant 20 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

a) Calcula el ingreso familiar medio esperado de esa población.

b) Si solo realizan la declaración de la renta los individuos con ingresos superiores a 9 000 euros, ¿qué porcentaje de ellos quedarán exentos de realizar la declaración?

3. Se sabe que la altura de los varones de una Universidad sigue una distribución normal de media 1,75 m y que el 33 % de estos alumnos mide más de 1,80 m. Calcula la varianza de la distribución de las alturas.

4. El tiempo, X, de funcionamiento (en horas) hasta la primera avería de un lavavajillas sigue una distribución normal de media 20 000 horas. Se sabe que el 20 % de los lavavajillas tiene, como mínimo, una duración de 21 680 horas.

a) Calcula $p(|X - 20\,000| < 2\,000)$.

b) Si se quiere ofrecer un período de garantía, expresado en horas, ¿cuál debe ser el máximo valor que hay que dar a este para tener que reemplazar solo el 5 % de los aparatos?

5. El peso del contenido de las latas de melocotón en almíbar envasadas por una cierta máquina se distribuye normalmente con media de 1 kg. El proceso de envasado está diseñado de tal manera que solo una de cada 100 latas contiene una cantidad del producto fuera del intervalo 950-1 050 g. ¿Cuál es el valor máximo que puede tener la desviación típica de la distribución de pesos para que se cumpla este requisito?

6. En una isla del Pacífico se ha comprobado que la estatura sigue un modelo normal de probabilidad con una media de 160 cm. Sabiendo que el 47,5 % de los nativos de esa isla tienen una estatura comprendida entre 150 y 160 cm y que el 16 % de ellos supera los 165 cm, determina, sin utilizar las tablas de la distribución normal:

a) El porcentaje de nativos que tienen una estatura inferior a 170 cm.

b) La estatura que es superada por el 84% de la población.

7. Se sabe que el 40 % de los consumidores de una marca de cereales para el desayuno son niños de edades comprendidas entre los ocho y los doce años. Se eligen al azar 100 niños de esas edades. ¿Cuál es la probabilidad de que, si los primeros veinticinco niños preguntados declaran que toman esa marca de cereal para desayunar, haya exactamente cuarenta niños en la muestra que la consuman?

8. Un examen contiene 38 preguntas a las que solo se puede responder Verdadero o Falso. Si decidimos contestar al azar lanzando al aire una moneda, la probabilidad de superar el examen es 0,4364. Calcula cuál es el número mínimo de preguntas que hay que acertar para superar este examen.

SOLUCIONES

1. $1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{k}{1+x^2}dx = k \cdot [\text{arctg}x]_0^1 =$

$= k\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = k\frac{\pi}{4} \Rightarrow k = \frac{4}{\pi}$

$\mu = \int_0^1 x \cdot f(x)dx = \int_0^1 \frac{\frac{4}{\pi}x}{1+x^2}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx =$

$= \frac{2}{\pi} \cdot [L\,|1 + x^2|]_0^1 = \frac{2 \cdot L2}{\pi}$

2. a) $\mu = \int_0^{20} x \cdot \frac{3}{4\,000}(20x - x^2)dx =$

$= \frac{3}{4\,000}\int_0^{20} x(20x - x^2)dx = 10$

El ingreso familiar medio esperado es de 10 000 euros.

b) $p(x < 9) = \int_0^9 \frac{3}{4\,000}(20x - x^2)dx = 0{,}425$

El 42,5 % de los individuos de esa población quedarán exentos.

3. X es $N(1{,}75, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - 1{,}75}{\sigma}$ es $N(0, 1)$

$p(X > 1{,}80) = 0{,}33$

$p\left(Z > \frac{1{,}80-1{,}75}{\sigma}\right) = 0{,}33 \Rightarrow 1-p\left(Z \leqslant \frac{0{,}05}{\sigma}\right) = 0{,}33$

$p\left(Z \leqslant \frac{0{,}05}{\sigma}\right) = 0{,}67$

Buscando en la tabla:

$\frac{0{,}05}{\sigma} = 0{,}44 \Rightarrow \sigma = 0{,}1136 \text{ cm} \Rightarrow \sigma^2 = 0{,}0129 \text{ cm}^2$

4. X es $N(20\,000, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - 20\,000}{\sigma}$ es $N(0, 1)$

$p(X > 21\,680) = 0{,}2 = p\left(Z > \frac{1\,680}{\sigma}\right)$

$p\left(Z < \frac{1\,680}{\sigma}\right) = 0{,}8$

Buscando en la tabla $\frac{1\,680}{\sigma} = 0{,}84$, ya que $p(Z < 0{,}84) = 0{,}7995$; por tanto: $\sigma = 2\,000$.

a) $p(|X - 20\,000| < 2\,000) = p(|Z| < 1) =$

$= 2\left[p(Z < 1) - \frac{1}{2}\right] = 0{,}6826$

b) M: «máximo valor».

$p(X < M) = 0{,}95 = p\left(Z < \frac{M - 20\,000}{2\,000}\right)$

$\frac{M - 20\,000}{2\,000} = 1{,}645$

$M = 23\,290$

5. X es $N(1\,000, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - 1\,000}{\sigma}$ es $N(0, 1)$

$p(950 \leqslant X \leqslant 1\,050) = 0{,}99$

$p\left(\frac{-50}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{50}{\sigma}\right) = 0{,}99$

$2\left[p\left(Z \leqslant \frac{50}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\right] = 0{,}99 \Rightarrow p\left(Z \leqslant \frac{50}{\sigma}\right) = 0{,}995$

Buscando en la tabla $\frac{50}{\sigma} \geqslant 2{,}58 \Rightarrow \sigma \leqslant 19{,}38$

El máximo valor es: $\sigma = 19{,}38$ g

6. La función de densidad es simétrica respecto a la media $\mu = 160$.

a) $p(X < 170) = p(X > 150) = 0{,}475 + 0{,}5 =$
$= 0{,}975$

El 97,5 % de los nativos mide menos de 170 cm.

b) $0{,}84 = 1 - 0{,}16 = 1 - p(X > 165) =$
$= 1 - p(X > \mu + 5) = 1 - p(X < \mu - 5) = p(X \geqslant 155)$

7. X: «número de consumidores entre los 100 niños» es $B(100; 0{,}4)$ con $\mu = 40$ y $\sigma \approx 4{,}9$.

Se puede aproximar por una normal $N(40; 4{,}9)$.

$p(X = 40/X \geqslant 25) = \frac{p(X = 40)}{p(X \geqslant 25)} =$

$= \frac{p(39{,}5 < X \leqslant 40{,}5)}{1 - p(X < 24{,}5)} =$

$= \frac{p\left(\frac{39{,}5 - 40}{4{,}9} < Z \leqslant \frac{40{,}5 - 40}{4{,}9}\right)}{1 - p\left(Z < \frac{24{,}5 - 40}{4{,}9}\right)} =$

$= \frac{2[p(Z \leqslant 0{,}1) - 0{,}5]}{p(Z < 3{,}16)} = 0{,}08$

8. X: «número de respuestas correctas» es $B(38; 0{,}5)$ con $\mu = 19$ y $\sigma = 3{,}08$. Se puede aproximar por una normal $N(19; 3{,}08)$. Si M: «número de respuestas correctas necesario para aprobar», $p(X \geqslant M) =$
$= 0{,}4364$.

$0{,}4364 = p\left(Z \geqslant \frac{M - 19}{3{,}08}\right) \Rightarrow \frac{M - 19}{3{,}08} \geqslant 0{,}16$

$M \geqslant 19{,}492$

Como mínimo hay que acertar veinte preguntas.