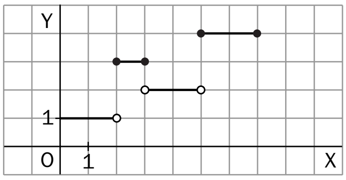
19 Área bajo una curva. Integral definida

1. Dada la siguiente gráfica $y = f(x)$:

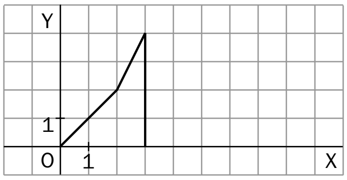


a) Escribe la ecuación de la función.
Ten en cuenta que esta función está solo definida en el intervalo [0, 7].

b) Consideramos la nueva función $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ con $0 \leqslant t \leqslant 7$, que, como sabes, representa el área limitada por la función anterior, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 0$ y $x = t$. Escribe la ecuación de esta nueva función.

c) Dibuja la función definida en el apartado anterior.

2. Dada la gráfica siguiente:



a) Escribe la ecuación $y = f(x)$ de la función representada.
Ten en cuenta que dicha función está solo definida en el intervalo [0, 3].

b) Consideramos la nueva función $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ con $0 \leqslant t \leqslant 3$ que representa el área limitada por la función anterior, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 0$ y $x = t$. Escribe la ecuación de esta nueva función.

c) Calcula el valor de la expresión $F\left(\frac{5}{2}\right) - F(1)$.

3. Consideramos la función $y = f(x) = |2x - 2|$:

a) Escribe otra ecuación equivalente a la anterior pero definida a trozos.

b) Calcula el valor $\int_0^2 |2x - 2|\,dx$.

4. Consideramos la función $y = f(x) = |x^2 - 4x + 3|$:

a) Escribe otra ecuación equivalente a la anterior pero definida a trozos.

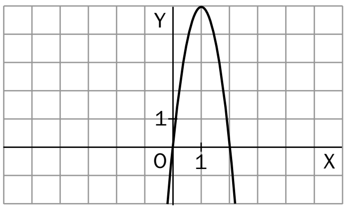
b) Representa la función $y = f(x)$.

c) Calcula el valor $\int_0^2 |x^2 - 4x + 3|\,dx$.

5. a) Dibuja la parábola $y = \frac{1}{4}x^2$ y la curva $y = 2\sqrt{x}$ y determina los puntos de corte de las funciones dibujadas.

b) Calcula el área limitada por las dos funciones.

6. El eje de la parábola de la figura es paralelo al eje de ordenadas.



a) Calcula la ecuación de la parábola sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y su vértice está situado en el punto (1, 4).

b) Calcula el área que delimitan la parábola y el eje de abscisas.

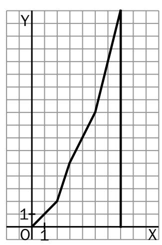
SOLUCIONES

1. a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 3 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x < 5 \\ 4 & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$

b) $F(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 2 + 3 \cdot (t - 2) & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2 + 3 + 2 \cdot (t - 3) & \text{si } 3 < x < 5 \\ 9 + 4 \cdot (t - 5) & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$

$\Rightarrow F(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 3t - 4 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2t - 1 & \text{si } 3 < x < 5 \\ 4t - 11 & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$

c)



2. a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x - 2 & \text{si } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$

b) $F(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2 & \text{si } 0 \leqslant t < 2 \\ 2 + \dfrac{(2 + 2t - 2) \cdot (t - 2)}{2} & \text{si } 2 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}$

$\Rightarrow F(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2 & \text{si } 0 \leqslant t < 2 \\ t^2 - 2t & \text{si } 2 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}$

c) $F\left(\dfrac{5}{2}\right) - F(1) = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$

3. a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } 2x - 2 \geqslant 0 \\ -2x + 2 & \text{si } 2x - 2 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \geqslant 1 \\ -2x + 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_0^2 |2x - 2|\, dx =$

$= \displaystyle\int_0^1 (-2x + 2)dx + \int_1^2 (2x - 2)dx =$

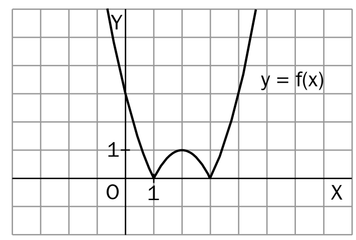
$= \left[-x^2 + 2x\right]_0^1 + \left[x^2 - 2x\right]_1^2 =$

$= (-1 + 2) + (4 - 4 - 1 + 2) = 1 + 1 = 2\ u^2$

4. a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

b)



c) $\displaystyle\int_0^2 |x^2 - 4x + 3|\, dx =$

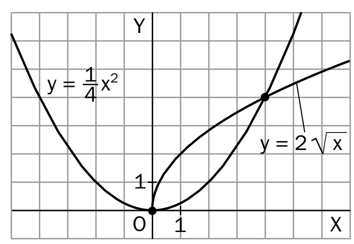
$= \displaystyle\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx + \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3)dx =$

$= \left[\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 + \left[-\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^2 =$

$= \left(\dfrac{1}{3} - 2 + 3\right) + \left(-\dfrac{8}{3} + 8 - 6 + \dfrac{1}{3} - 2 + 3\right) =$

$= \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} = 2\ u^2$

5. a)



b) $S = \displaystyle\int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \dfrac{x^2}{4}\right) dx = \left[\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3} - \dfrac{x^3}{12}\right]_0^4 =$

$= \dfrac{32 - 16}{3} = \dfrac{16}{3}\ u^2$

6. a) Sea $y = ax^2 + bx + c$ la ecuación de la parábola: $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b + c = 4 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -4,\ b = 8$

$y = -4x^2 + 8x$

b) $S = \displaystyle\int_0^2 (-4x^2 + 8x)dx = \left[-\dfrac{4x^3}{3} + 4x^2\right]_0^2 =$

$= -\dfrac{32}{3} + 16 = \dfrac{16}{3}\ u^2$