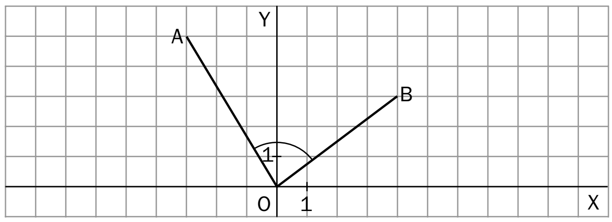
9 Problemas métricos

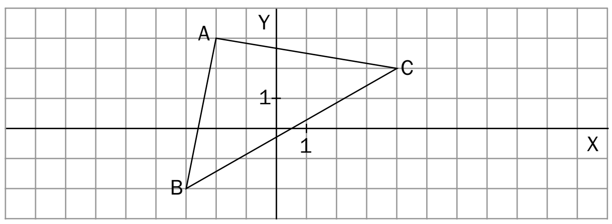
1. Calcula la distancia que separa a los puntos A y B, así como la medida del ángulo $\widehat{AOB}$ de la figura.



2. Calcula la medida de los lados del hexágono de vértices: A(2, 1), B(1, 2) C(−1, 2), D(−2, −1), E(−1, −3), F(2, −2).

3. Calcula los ángulos de cuadrilátero cuyos vértices son: A(2, 2), B(2, 4), C(−1, 1), D(−1, −1).

4. Calcula la medida de los lados y de los ángulos del triángulo de la figura.



5. Demuestra que las siguientes rectas son paralelas y, después, calcula la distancia que las separa:

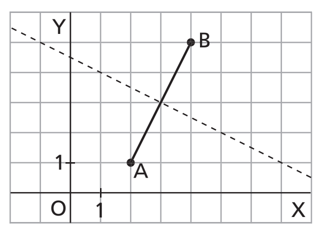
r: $2x + y - 2 = 0$ s: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 4t \end{cases}$

6. Dadas las rectas r: $3x - y + 5 = 0$ y s: $2x + 3y - 4 = 0$ y el punto P(3, 4):

a) Calcula la suma de las distancias que separan P de cada una de las rectas.

b) Calcula la distancia que separa a P del punto de corte de ambas rectas.

7. Dados los puntos A(2, 1) y B(4, 5):



a) Calcula la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A y B. ¿Qué verifican todos los puntos de este lugar geométrico?

b) Calcula las coordenadas de un punto situado en el eje de ordenadas y que equidiste de los puntos A y B.

8. Calcula las coordenadas de los vértices y el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:

r: $x + 2y - 4 = 0$ s: $2x - 3y - 1 = 0$ t: $4x + y + 5 = 0$

9. Calcula las coordenadas de un punto que pertenezca a la recta r: $x - 2y + 3 = 0$ y tal que la distancia que le separa del punto P(6, −1) sea igual a 5 unidades de longitud.

10. Se considera la recta que tiene por ecuación r: $x - y + 4 = 0$ y los puntos que tienen por coordenadas A(0, 7) y B(3, 2):

a) Calcula la ecuación de la recta s que pasa por A y por B.

b) Calcula las ecuaciones de las bisectrices determinadas por las rectas r y s.

SOLUCIONES

1. $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$

$\cos \widehat{AOB} = \cos (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \dfrac{-12 + 15}{\sqrt{34 \cdot 5}}$

$\widehat{AOB} = 84{,}09... = 84°5'38''$

2. $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}$

Calculamos del mismo modo:

$d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4} = 2$

$d(C, D) = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{10}$

$d(D, E) = |\overrightarrow{DE}| = \sqrt{5}$

$d(E, F) = |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{10}$

$d(F, A) = |\overrightarrow{FA}| = \sqrt{9} = 3$

3. $\overrightarrow{AB} = (0, 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-3, -3)$, $\overrightarrow{CD} = (0, -2)$, $\overrightarrow{DA} = (3, 3)$

Por tanto, se trata de un paralelogramo.

$\cos \widehat{DAB} = \cos (\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}) = \dfrac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{-6}{\sqrt{18}\,\sqrt{4}}$

$\widehat{DAB} = 135° \Rightarrow \widehat{BCD} = 135°$

$\cos \widehat{ABC} = \cos (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{6}{\sqrt{4}\,\sqrt{18}}$

$\widehat{ABC} = 45° \Rightarrow \widehat{CDA} = 45°$

4. $A(-2, 3)$, $B(-3, -2)$, $C(4, 2)$

$\overrightarrow{AB} = (-1, -5)$, $\overrightarrow{BC} = (7, 4)$, $\overrightarrow{CA} = (-6, 1)$

$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$

$d(B, C) = \sqrt{65}$ $\quad$ $d(C, A) = \sqrt{37}$

$\cos \widehat{CAB} = \cos (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{-6 + 5}{\sqrt{26}\,\sqrt{37}}$

$\widehat{CAB} = 91{,}84... = 91°50'51''$

$\cos \widehat{ABC} = \cos (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{27}{\sqrt{26}\,\sqrt{65}}$

$\widehat{ABC} = 48{,}94... = 48°56'42'' \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{BCA} = 39{,}20... = 39°12'26''$

5. $\left.\begin{array}{l} s: \dfrac{x - 2}{-2} = \dfrac{y + 1}{4} \Rightarrow 2x + y - 3 = 0 \\ r: 2x + y - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

$d(r, s) = \dfrac{|-2 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

6. a) $d(P, r) + d(P, s) = \dfrac{|9 - 4 + 5|}{\sqrt{9 + 1}} + \dfrac{|6 + 12 - 4|}{\sqrt{4 + 9}} =$

$= \dfrac{10}{\sqrt{10}} + \dfrac{14}{\sqrt{13}} = \sqrt{10} + \dfrac{14\sqrt{13}}{13}$

b) Punto de corte: $Q(-1, 2)$

$d(P, Q) = \sqrt{(3 + 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

7. a) Mediatriz del segmento AB:

$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 5)^2}$

$x + 2y - 9 = 0$

Todos los puntos de esta recta equidistan de A y de B.

b) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 9 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$ El punto es $P\left(0, \dfrac{9}{2}\right)$

8. $\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - 3y - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow A(2, 1)$

$\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 4 = 0 \\ 4x + y + 5 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow B(-2, 3)$

$\left\{\begin{array}{l} 4x + y + 5 = 0 \\ 2x - 3y - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow C(-1, -1)$

Base $= d(A, B) = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Recta que pasa por A y por B: $r: x + 2y - 4 = 0$

Altura $= d(C, r) = \dfrac{|-1 - 2 - 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \dfrac{7}{\sqrt{5}}$

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \dfrac{7}{\sqrt{5}} = 7$ unidades cuadradas

9. $r: \left\{\begin{array}{l} x = -3 + 2t \\ y = t \end{array}\right. \Rightarrow$ Sea $Q(-3 + 2t, t)$

$d(Q, P) = \sqrt{(9 - 2t)^2 + (-1 - t)^2} = 5 \Rightarrow t = \dfrac{19}{5}, t = 3$

El problema tiene dos soluciones:

$Q_1\left(\dfrac{23}{5}, \dfrac{19}{5}\right)$, $Q_2(3, 3)$

10. a) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y - 7}{2 - 7} \Rightarrow -5x = 3y - 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow s: 5x + 3y - 21 = 0$

b) $\dfrac{|x - y + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|5x + 3y - 21|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{34}(x - y + 4) = \sqrt{2}(5x + 3y - 21) \\ \sqrt{34}(x - y + 4) = -\sqrt{2}(5x + 3y - 21) \end{array}\right.$

Las ecuaciones de las bisectrices son:

$(\sqrt{17} - 5)x - (\sqrt{17} + 3)y + 4\sqrt{17} + 21 = 0$

$(\sqrt{17} + 5)x - (\sqrt{17} - 3)y + 4\sqrt{17} - 21 = 0$